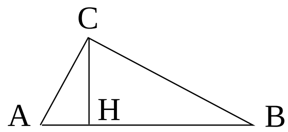
Examen écrit de géométrie

Premier bachelier en sciences physiques, juin 2011

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. Bon travail !

1.[3 points] Dans un espace affin euclidien de dimension 2 muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, H et B de coordonnées respectives $(1, -2)$, $(4, 0)$ et $(10, 4)$. Déterminer les coordonnées des points C tels que le triangle ABC soit rectangle en C et que H soit le pied de la hauteur issue de C.



Solution : On cherche un ou des points C tels que $CH \perp AB$ et $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0$. Un vecteur directeur de la droite AB est donné par $u : (3, 2)$ et le vecteur $v : (-2, 3)$ lui est orthogonal. Donc comme $\overrightarrow{HC}$ a pour composantes $(c_1 - 4, c_2)$, il faut que $\overrightarrow{HC} = k.v$ pour un certain k. De là, on trouve

$$\begin{cases} k &= \frac{c_2}{3} \\ c_1 &= -\frac{2}{3}c_2 + 4 \end{cases}$$

Il faut aussi que $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0$. On a

$$\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (1 - c_1, -2 - c_2), (10 - c_1, 4 - c_2) \rangle = 0.$$

En utilisant le fait que $c_1 = -\frac{2}{3}c_2 + 4$, nous obtenons après calcul que $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0 \Leftrightarrow c_2^2 = 18$. Donc les points C qui répondent à la question ont pour coordonnées $(-2\sqrt{2} + 4, 3\sqrt{2})$ ou $(2\sqrt{2} + 4, -3\sqrt{2})$.

2. [6 points] Dans l'espace affin euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\mathcal{D} \equiv \begin{cases} 2y + z = 3 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

et la famille de plans π_α (α est un paramètre réel) d'équation $\alpha\, x + 2y - z = \alpha$.

a) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

b) Pour quelle valeur du paramètre α, le plan π_α est-il parallèle à la droite $\mathcal{D}$? Dans ce cas, la droite est-elle strictement parallèle à π_α ou incluse dans ce plan ?

c) On considère le point P de coordonnées $(0, 2, 3)$. Donner en fonction de α, la distance de P à π_α. Pour quelle valeur de α cette distance est-elle minimale ?

d) Donner les équations du symétrique orthogonal par rapport au plan $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$ de la droite passant par le point Q de coordonnées $(2, 1, -1)$ et de vecteur directeur de composantes $(2, 3, 8)$.

Solution :

a): Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $u : (1, 1, -2)$.

b): Un vecteur normal à π_α est $v_\alpha : (\alpha, 2, -1)$. Pour que $\mathcal{D}$ soit parallèle à π_α, il faut que $\langle u, v_\alpha \rangle = 0$ c'est-à-dire (après calcul) que $\alpha = -4$.
La droite $\mathcal{D}$ est-elle incluse dans $\pi_{-4} \equiv -4x + 2y - z = -4$? Soit A de coordonnées $(-2, 0, 3)$ un point de $\mathcal{D}$. Est-ce que A est dans π_{-4} ? Non car $-4.(-2) + 2.0 - 3 \neq -4$. Par conséquent, $\mathcal{D}$ n'est pas incluse dans π_{-4}.

c): Nous cherchons $d(P, \pi_\alpha)$. Rappelons que $d(P, \pi_\alpha) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, N \rangle|}{|N|}$ où A est un point de π_α et N est vecteur normal à π_α. Prenons A de coordonnées $(1, 0, 0)$ et N de composantes $(\alpha, 2, -1)$. On a $\langle \overrightarrow{AP}, N \rangle = -\alpha + 1$ et $|N| = \sqrt{\alpha^2 + 5}$. On trouve ainsi

$$d(P, \pi_\alpha) = \frac{|-\alpha + 1|}{\sqrt{\alpha^2 + 5}}.$$

Pour $\alpha = 1$, cette distance est minimale.

d): L'équation de la droite passant par Q et de vecteur directeur $w(2, 3, 8)$ est
$\mathcal{D}' \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{8} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - 2y - 4 & = & 0 \\ 4x - z - 9 & = & 0 \end{array} \right.$
Cherchons maintenant l'éventuelle intersection entre $\mathcal{D}'$ et π_1 :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x - 2y - 4 & = & 0 \\ 4x - z - 9 & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2y & = & 3x - 4 \\ z & = & 4x - 9 \\ 0.x + 5 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ce système n'ayant pas de solution, $\mathcal{D}'$ et π_1 sont (strictement) parallèles. Nommons M le point d'intersection de la droite passant par Q et perpendiculaire à π_1. La droite QM a pour vecteur directeur $(1, 2, -1)$ et passe par Q donc a pour équation
$QM \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y - 3 & = & 0 \\ x + z - 1 & = & 0 \end{array} \right.$
Cherchons les coordonnées de M (c'est-à-dire l'intersection entre QM et π_1) : $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y - 3 & = & 0 \\ x + z - 1 & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{4}{3} \\ y & = & -\frac{1}{3} \\ z & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right.$
Donc M a pour coordonnées $(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
Cherchons maintenant Q' tel que $Q' = Q + 2\overrightarrow{QM}$. On a $Q'(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$. La droite cherchée passe par Q' et a le même vecteur directeur w que $\mathcal{D}'$ donc ses équations sont données par $\mathcal{D}'' \equiv \frac{x-\frac{2}{3}}{2} = \frac{y+\frac{5}{3}}{3} = \frac{z-\frac{1}{3}}{8}$.

3. [2 points] Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique, on donne le vecteur u de composantes $(1, 1)$. Déterminer les composantes de v sachant que $|v| = 3$ et que l'angle orienté déterminé par (u, v) vaut $5\pi/6$.
Solution : Rappelons que $\cos(\theta) = \frac{\langle u,v \rangle}{|u|.|v|}$ et $\sin(\theta) = \frac{\det(u,v)}{|u|.|v|}$. Soient (v_1, v_2) les

composantes de v dans la base canonique. On a $\langle u, v \rangle = v_1 + v_2$, $\det(u, v) = v_2 - v_1$ et $|u| = \sqrt{2}$. Par conséquent, on a

$$\begin{cases} v_1 + v_2 &= -\frac{3\sqrt{6}}{2} \\ v_2 - v_1 &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 &= -\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \\ v_2 &= \frac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6}) \end{cases}$$

Donc, v a pour composantes $(-\frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}), \frac{3}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6}))$.

4. [4 points] Dans un espace affin de dimension 3, on considère un tétraèdre $ABCD$. Dans un repère au choix, représenter matriciellement l'application affine $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T}(A) = B$, $\mathcal{T}(B) = C$, $\mathcal{T}(C) = D$ et $\mathcal{T}(D) = A$. La matrice obtenue ne contiendra aucune indéterminée, i.e., on donnera les valeurs numériques explicites de ses éléments. Utiliser cette représentation pour obtenir les coordonnées de $\mathcal{T}(G)$ où G est le centre de gravité du tétraèdre. Quelle est l'image par $\mathcal{T}$ de la droite passant par A et le milieu du segment $[B, C]$? On donnera les équations de cette droite dans le repère choisi.

Solution : Nous choisissons le repère $(A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}))$. Nous avons donc que

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \mathcal{T}(\overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \quad \mathcal{T}(\overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AB}$$

Par conséquent, nous obtenons la repésentation matricielle

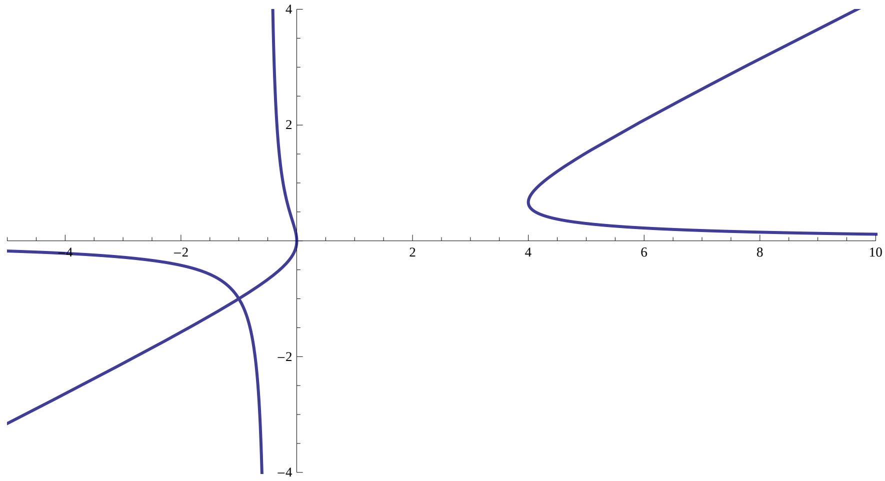
$$\mathcal{T} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons maintenant $\mathcal{T}(G)$ où $G = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$. En exploitant la représentation ci-dessus avec $x_1 = x_2 = x_3 = 1/4$, nous obtenons que $\mathcal{T}(G) = G$. Les coordonnées de M, milieu de $[B, C]$ sont $\frac{1}{2}(1, 1, 0)^{\sim}$. La droite cherchée passe par $\mathcal{T}(A) = B$ et a pour vecteur directeur $\mathcal{T}(\overrightarrow{AM}) = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\sim}$. Une variante consiste à utiliser le fait que cette droite passe par le milieu de $[\mathcal{T}(B), \mathcal{T}(C)]$. Par conséquent, la droite cherchée a pour équation

$$\mathcal{D} \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$$

5. [5 points] Dans le plan euclidien, on considère le paramétrage de courbe

$$P(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t}{t^2-1}\right), \ t \in \Omega = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$



a) Vérifier qu'il s'agit d'un arc régulier de courbe.
b) Donner l'équation de la tangente au point $P(0)$
c) Déterminer toutes les valeurs du paramètre t pour lesquelles la courbe admet une tangente verticale en $P(t)$.
d) Vérifier (par le calcul) que le point de coordonnées $(-1, -1)$ est un point double de la courbe.
e) Montrer que la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe.

Solution :

a): $D_tP = \left(\dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2}, \dfrac{-(t^2+1)}{(t^2-1)^2}\right) \neq (0,0)$
car la seconde composante ne s'annule jamais sur Ω. Donc c'est un arc régulier de courbe (sur Ω).

b): $P(0) = (0,0)$ et $D_tP(0) = (0,-1)$ est un vecteur vertical donc l'équation de la tangente est $x = 0$.

c): La courbe admet une tangente verticale en $t = 0$ et en $t = 2$ (ce sont les zéros de la première composante de D_tP).

d): Dans Ω, on a $\frac{t^2}{t-1} = -1 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$ et $\frac{t}{t^2-1} = -1 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$. Donc nous avons $t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc le point $(-1,-1)$ est un point double car $P(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = P(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = (-1,-1)$.

e): La droite $x = -\frac{1}{2}$ est une asymptote si, lorsque $\frac{t^2}{t-1}$ tend vers $-\frac{1}{2}$, alors $\frac{t}{t^2-1}$ tend vers l'infini.
On a $\frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -1$ ou $\frac{1}{2}$. On a bien que $\lim_{t \to -1^-} \frac{t}{t^2-1} = -\infty$ et $\lim_{t \to -1^+} \frac{t}{t^2-1} = +\infty$ donc la droite $x = -\frac{1}{2}$ est bien une asymptote à la courbe.