Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mai–juin 2011

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 10h30.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.
- Dans les exercices contenant plusieurs points, pour résoudre l'un de ceux-ci, on peut supposer acquis les résultats donnés précédemment.

Bon travail !

1. Soient une base $U = (e_1, e_{2,3})$ d'un $\mathbb{K}$-vectoriel et l'endomorphisme T défini par $T(e_1) = e_2 - e_3$, $T(e_2) = e_2$ et $T(e_3) = 2e_1 - e_3$. Représenter T dans la base $V = (f_1, f_2, f_3)$ donnée par $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$ et $f_3 = e_1 + e_2$.

2. Soit la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer explicitement que M n'est pas diagonalisable (en comparant les multiplicités algébrique et géométrique).
b) Réduire M à la forme canonique de Jordan. On fournira une matrice S et la matrice réduite $S^{-1}MS$ correspondante.
c) Donner le polynôme minimum de M.
d) Soit la matrice $A = M^4 - 6M^3 + 7M^2 + 24M - 6I$. Trouver un polynôme P de degré minimum (strictement inférieur à 4) tel que $P(M) = A$.

$\longrightarrow$

3. Soit $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

a) Montrer <u>explicitement</u> qu'une matrice $M \in \mathbb{C}_n^n$ commute avec Δ si et seulement si elle est diagonale.

b) Montrer que pour toute matrice diagonale M, il existe un polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $M = P(\Delta)$.

c) Soient S une matrice inversible et P un polynôme, vérifier que

$$P(S^{-1}\Delta S) = S^{-1}P(\Delta)S.$$

d) Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$ une matrice ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices M commutant avec A sont les polynômes en la matrice A.

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère une base U de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté par A dans la base U. Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel stable pour T et déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables pour T.

5. On pose $U_0 = 1$ et pour tout entier $p \geq 1$, on définit le polynôme

$$U_p = \frac{1}{p!}X(X-1)\cdots(X-(p-1)).$$

Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des polynômes de degré au plus n. On définit l'application

$$T : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X],\ P \mapsto P(X+1) - P(X).$$

a) Calculer $T^k(U_p)$ pour tous $p, k \in \mathbb{N}$.

b) Vérifier que T est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$ et fournir une chaîne engendrée par T de longueur maximum.

c) Montrer que $\mathcal{B} = (U_0, \ldots, U_n)$ forme une base de $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$.

d) Représenter T dans la base $\mathcal{B}$.

e) Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{C}[X]_{\leq 2}$ à la base (U_0, U_1, U_2). En déduire que pour tout polynôme P de degré au plus 2, on a

$$P = P(0) + (TP)(0)\,U_1 + (T^2P)(0)\,U_2.$$

Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mai–juin 2011

Fin de l'examen **12h30** !

6. Soit A une matrice de $\mathbb{C}_n^n$. On appelle *centralisateur* de A, l'ensemble $C(A) = \{M \in \mathbb{C}_n^n \mid AM = MA\}$. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n^n$. Caractériser les matrices de $C(A)$ quand

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Pour quelles valeurs de n l'entier

$$n^3 - 2n + 7$$

est-il divisible par 3, 5 ou 15 ?

8. Discuter le rang de la matrice suivante en fonction du paramètre complexe λ

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$