Examen écrit d'algèbre

Deuxième bachelier en sciences physiques,
juin 2010

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées (préciser les étapes de calcul et rappeler un résultat du cours théorique peut suffire).
- Les étudiants doivent rendre leurs solutions pour **midi** au plus tard.

Bon travail !

Note pour la correction. Il s'agit ici d'une ébauche des solutions (une solution complète lors de l'examen peut nécessiter de plus longs développements ou plus de justifications).

1. [3 points] Montrer qu'il existe une *unique* application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2 \text{ et } T\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 5.$$

Déterminer le noyau et l'image de T (c'est-à-dire caractériser les éléments appartenant à ces ensembles).

Solution : les vecteurs $(1,2)$ et $(-2,1)$ formant une base de $\mathbb{R}^2$, l'unicité de l'application découle du fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par les images des éléments d'une base. En effet, si S est une application linéaire telle que

$$S\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2 \text{ et } S\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = 5,$$

alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vu la linéarité de S et de T, on a

$$S(\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}) = \alpha S\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta S\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \alpha T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = T(\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}).$$

Autrement dit, $S(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Puisque

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x+2y}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{-2x+y}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},$$

on a

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2\frac{x+2y}{5} + 5\frac{-2x+y}{5} = \frac{-8x+9y}{5}$$

et le noyau de T est l'ensemble des multiples (l'enveloppe linéaire) du vecteur $(9,8)$. L'image de T est $\mathbb{R}$.

2. [6 points] Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base U d'un $\mathbb{C}$-vectoriel E de dimension 3. On note $T : E \to E$ l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

a) Représenter matriciellement T dans la base $U = (e_1, e_2, e_3)$.

b) On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
- Montrer que $V = (f_1, f_2, f_3)$ est encore une base de E.
- Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base U à la base V.
- Représenter matriciellement T dans la base V.

c) On considère la matrice inversible

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle relation lie P, P^{-1} et les représentations matricielles de T obtenues aux deux points précédents.

d) Donner une base du noyau de T.

Solution :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On vérifie facilement que f_1, f_2, f_3 sont linéairement indépendants (ce qui suffit pour former une base car $\dim E = 3$). On a $e_1 = f_1 + f_2 + f_3$, $e_2 = f_1 + f_3$ et $e_3 = f_2 + f_3$. De là, la matrice de changement de bases pour passer de la base U à la base V est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la représentation matricielle de T dans la base (f_1, f_2, f_3), on peut calculer $Tf_1 = 0$, $Tf_2 = f_2$ et $Tf_3 = f_3$ ou bien, en utilisant la formule de changement de bases :

$$SMS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Il suffit de remarquer que les colonnes de P sont les composantes des f_i dans la base U. Il s'agit donc de la matrice de changement de bases pour passer de la base V à la base U. Autrement dit, $P = S^{-1}$.

d) Un élément $xf_1 + yf_2 + zf_3$ appartient à $\ker T$, $x, y, z \in \mathbb{C}$, si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, une base du noyau de T est donnée par f_1.

3. [4 points] Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \{A, B\}$ est diagonalisable, fournir explicitement une matrice S et la matrice diagonale $S^{-1}MS$ correspondante.

Solution : On vérifiera que A possède 3 comme valeur propre simple et 2 comme valeur propre double mais dont la multiplicité géométrique vaut 1. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable.

La matrice

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est telle que $S^{-1}BS = \operatorname{diag}(2, 2, 3, 3)$.

4. [4 points] Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On fournira une matrice S et la matrice réduite $S^{-1}MS$ correspondante.

Solution :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & -1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. [3 points] Soit T un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $(u_1, \ldots, u_n)$. Pour tout $n \geq 1$ impair, montrer que $\dim \ker T \neq \dim \operatorname{Im} T$. Pour tout $n \geq 2$ pair, donner un exemple d'endomorphisme T, tel que $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.

Solution : il s'agit d'une application du théorème de la dimension. Puisque $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim E$, si E est de dimension impaire, il est impossible que $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$ (car si tel était le cas, on obtiendrait que $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 2 \dim \ker T$ est pair). Supposons à présent E de dimension paire $n = 2d$. Soit $e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_{2d}$ une base de E. L'application linéaire T définie par $Te_i = e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, d$ et $Te_i = 0$ pour tout $i = d+1, \ldots, 2d$ répond à la question. En effet, l'image de T est $\rangle e_1, \ldots, e_d \langle$ et le noyau de T est $\rangle e_{d+1}, \ldots, e_{2d} \langle$.