Examen écrit de géométrie

Premier bachelier en sciences physiques, mai 2010

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. Bon travail !

Note pour la correction. Il s'agit ici d'une ébauche des solutions (une solution complète lors de l'examen peut nécessiter de plus longs développements ou plus de justifications).

1.[3 points] Dans un espace affin de dimension 2 muni d'un repère $(O;(e_1,e_2))$, on considère quatre points A,B,C,D. Si u et v sont deux vecteurs de composantes respectives (u_1,u_2) et (v_1,v_2), on note

$$\det(u,v)=\det\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\det(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})+\det(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})+\det(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})=\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

b) En déduire que A,B,C sont alignés si et seulement si pour tout point P, on a $\det(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})+\det(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})+\det(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA})=0$.

Solution : On note (x_1,x_2) les coordonnées du point $X\in\{A,B,C,D\}$ dans le repère $(O;(e_1,e_2))$. On a

$$\det(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})=\det\begin{pmatrix}a_1-d_1 & b_1-d_1\\ a_2-d_2 & b_2-d_2\end{pmatrix}=a_1b_2+a_2d_1+b_1d_2-a_2b_1-b_2d_1-a_1d_2.$$

On procède par symétrie pour les autres termes de la somme et la vérification est immédiate. Les points A,B,C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement dépendants. Ceci a lieu si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$ et donc, en utilisant le point a) si et seulement si pour tout point P, $\det(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})+\det(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})+\det(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PA})=0$.

2. [7 points] Dans l'espace affin euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ d'équations respectives

$$\mathcal{D}\equiv\begin{cases}2y+z=3\\ x-y+2=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\mathcal{E}\equiv\begin{cases}-x+3z=1\\ -x-3y=2.\end{cases}$$

a) Donner un vecteur directeur de $\mathcal{E}$.

b) Donner les positions relatives des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$. En particulier, sont-elles orthogonales ?

c) On fixe un point M_α de $\mathcal{E}$ dépendant du paramètre α où α est l'abscisse (i.e., la première coordonnéee) du point M_α. Donner l'équation du plan π_α passant par M_α et contenant $\mathcal{D}$.

d) Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à $\mathcal{E}$? Si oui, pour quelle valeur α_0 de α est-il obtenu ? Donner une équation de ce plan et donner les coordonnées du point M_{α_0}.

e) Donner le symétrique orthogonal du point P de coordonnées $(9,1,-1)$ par rapport au plan d'équation $3x+y+z=5$.

Solution : a) $(3,-1,1)$

b) On vérifie que le système formé des 4 équations définissant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ est incompatible (les droites n'ont donc pas de point d'intersection). Ensuite, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donnée par $(1,1,-2)$ et on en conclut que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont orthogonales.

c) Le point M_α a pour coordonnées $(\alpha, -(2+\alpha)/3, (1+\alpha)/3)$. Un plan du faisceau de plans contenant la droite $\mathcal{D}$ est de la forme

$$\lambda(2y+z-3)+\mu(x-y+2)=0, \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0).$$

En injectant les coordonnées de M_α dans cette équation, on trouve

$$\lambda = 8+4\alpha \text{ et } \mu = 12+\alpha.$$

De là, une équation du plan recherché est donné par

$$(12+\alpha)x+(4+7\alpha)y+(8+4\alpha)z=10\alpha.$$

d) Une normale au plan trouvé au point précédent a pour composantes $(12+\alpha, 4+7\alpha, 8+4\alpha)$ et l'on recherche une valeur de α telle que ce vecteur est un multiple de $(3,-1,1)$. Ceci a lieu pour $\alpha_0=-12/11$. On en déduit facilement les coordonnées de M_{α_0}.

e) Une droite passant par P et perpendiculaire au plan $3x+y+z=5$ a pour équation

$$\frac{x-9}{3}=y-1=z+1.$$

L'intersection I de cette droite avec le plan $3x+y+z=5$ a pour coordonnées la solution du système

$$\begin{cases} x-3y=6 \\ y-z=2 \\ 3x+y+z=5 \end{cases}$$

c'est-à-dire $(3,-1,-3)$. Le point recherché est $P+2\overrightarrow{PI}$ de coordonnées $(-3,-3,-5)$.

3. [2 points] Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique, on donne le vecteur u de composantes $(1,1)$. Déterminer les composantes de v sachant que $|v|=2$ et que l'angle orienté déterminé par (u,v) vaut $\pi/3$.

Solution : Soient (v_1,v_2) les composantes de v dans la base canonique. On a

$$v_1+v_2=2\sqrt{2}\cos\pi/3=\sqrt{2}$$

et

$$v_2-v_1=2\sqrt{2}\sin\pi/3=\sqrt{6}.$$

De là, on tire aisément $v_1=(\sqrt{2}-\sqrt{6})/2$ et $v_2=(\sqrt{2}+\sqrt{6})/2$.

4. [3 points] Dans un plan affin, on considère un parallélogramme $ABCD$ (i.e., $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$). Dans un repère au choix, représenter matriciellement l'application affine $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T}(A)=B$, $\mathcal{T}(B)=C$ et $\mathcal{T}(C)=D$. La matrice obtenue ne contiendra aucune indéterminée, i.e., on donnera les valeurs numériques explicites de ses éléments. Utiliser cette représentation pour obtenir les coordonnées de $\mathcal{T}(D)$. Représenter le parallélogramme $ABCD$ et $\mathcal{T}(D)$.

$\longrightarrow$

Solution : Dans le repère $(A; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$, la matrice représentant $\mathcal{T}$ s'obtient à partir des composantes des vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{T}(A)\mathcal{T}(B)} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{\mathcal{T}(A)\mathcal{T}(C)} = \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ainsi que des coordonnées de $\mathcal{T}(A) = B$ dans le repère. On trouve

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le repère choisi, le point D a pour coordonnées $(-1, 1)$ et son image par $\mathcal{T}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $\mathcal{T}(A) = D$.

5. [5 points] Dans le plan euclidien, on considère le paramétrage de courbe

$$P(t) = \left(\frac{t^2+1}{t^3-1}, \frac{2t}{t^3-1} \right), \quad t \in \Omega = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

a) Sachant que les polynômes $2t^3+1$ et t^3+3t+2 n'ont aucun zéro commun, vérifier qu'il s'agit d'un arc régulier de courbe.
b) Donner l'équation de la tangente au point $P(0)$
c) Démontrer que les points $P(t)$, $P(u)$ et $P(v)$ sont alignés ($t, u, v \in \Omega$ deux à deux distincts) si et seulement si $tuv = t + u + v + 1$. *Suggestion* : les calculs peuvent s'avérer fastidieux, terminer par ce point. Il vous est loisible d'utiliser le résultat énoncé à la question 1.

Solution : On trouve

$$D_t P = \left(-\frac{t(2+3t+t^3)}{(t^3-1)^2}, -\frac{2(1+2t^3)}{(t^3-1)^2} \right).$$

Au vu de la suggestion, les deux composantes ne peuvent être simultanément nulles. En $t = 0$, on a une tangente verticale et $P(0)$ a pour coordonnées $(-1, 0)$. Ainsi, l'équation de la tangente est donnée par $x = -1$.

Après calcul, on trouve

$$\det(\overrightarrow{P(u)P(v)}, \overrightarrow{P(u)P(t)}) = \frac{2(t-u)(t-v)(u-v)(tuv-t-u-v-1)}{(t^3-1)(u^3-1)(v^3-1)}.$$

Les réels t, u, v étant deux à deux distincts, ce déterminant s'annule si et seulement si $tuv = t + u + v + 1$.