Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
juin 2010

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 10h30.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

Note pour la correction. Il s'agit ici d'une ébauche des solutions (une solution complète lors de l'examen peut nécessiter de plus longs développements ou plus de justifications).

1. [3 points] Soit E un espace vectoriel de dimension finie et T un endomorphisme de E. Montrer explicitement que $\ker T \subseteq \ker T^2$ et que $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2$. Démontrer ensuite que

$$\ker T = \ker T^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2.$$

Solution : Soit x appartenant à $\ker T$. Cela signifie que $Tx = 0$. Il vient $T^2x = T(Tx) = T0 = 0$ où pour la dernière égalité, on utilise le fait que T est linéaire. Autrement dit x appartient à $\ker T^2$.

Soit y appartenant à $\operatorname{Im} T^2$. Cela signifie qu'il existe x tel que $T^2x = y$. On a $y = T(Tx)$ et donc y appartient à $\operatorname{Im} T$ puisqu'il est l'image par T de Tx. On sait (théorème de la dimension) que

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim E = \dim \operatorname{Im} T^2 + \dim \ker T^2.$$

Dès lors, si $\ker T = \ker T^2$, cela entraîne de $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} T^2$ et puisque $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2$, on conclut que $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$. On procède de même pour l'autre implication.

2. [5 points]

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre complexe $\mu \in \mathbb{C}$, la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre complexe $\mu \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable par une matrice unitaire ?

c) Dans le cas où $\mu = 1$, diagonaliser A, fournir S et la matrice diagonale $S^{-1}AS$ correspondante. Est-il possible d'avoir S unitaire et si oui, prendre un tel S.

Solution : On trouve

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 \left(\lambda - \frac{\mu - \sqrt{12+\mu^2}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{\mu + \sqrt{12+\mu^2}}{2}\right)$$

Après calcul, deux cas de figures se présentent. Si $\mu = \pm 2i\sqrt{3}$, alors on est en présence deux valeurs propres doubles 0 et $\pm i\sqrt{3}$. Pour ce premier cas, les multiplicités algébrique et géométrique de la valeur propre $i\sqrt{3}$ diffèrent et A n'est donc pas diagonalisable.

Si $\mu \neq \pm 2i\sqrt{3}$, alors on est en présence d'une valeur propre double : 0 et de deux valeurs propres simples $(\mu - \sqrt{12+\mu^2})/2$ et $(\mu + \sqrt{12+\mu^2})/2$. Ici, on vérifie que A est diagonalisable (il suffit de vérifier que la multiplicité géométrique de 0 est 2).

b) Cela revient à voir quand A est une matrice normale. On vérifie facilement que $AA^* = A^*A$ si et seulement si μ est réel.

c) Si $\mu = 1$, on est en présence d'une matrice réelle symétrique (donc en particulier, normale) qui est diagonalisable par une matrice unitaire. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/N & 1/M \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{13})/2N & (1+\sqrt{13})/2M \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/N & 1/M \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/N & 1/M \end{pmatrix}$$

où $N = (13-\sqrt{13})/2$ et $M = (13+\sqrt{13})/2$, est unitaire (ses colonnes sont orthonormées) et telle que $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(0, 0, (1-\sqrt{13})/2, (1+\sqrt{13})/2)$.

3. [5 points] Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On considère l'endomorphisme $T : E \to E$ tel que

$$Te_1 = 2e_2 + 3e_3,\ Te_2 = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3,\ Te_3 = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

a) Représenter T dans la base (e_1, e_2, e_3).

b) Donner une base et la dimension de $\ker(T - id_E)$

c) Donner une base et la dimension de $\ker(T^2 + id_E)$

d) Montrer que la réunion des bases obtenues en a) et b) est une base de E. Représenter matriciellement T et T^2 dans cette nouvelle base.

$\longrightarrow$

Solution : a) T est représenté dans la base (e_1, e_2, e_3) par

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) $xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $\ker(T - id_E)$, $x, y, z \in \mathbb{K}$, si et seulement si

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et finalement, si et seulement si, $x = y = z$. Ainsi, une base de $\ker(T - id_E)$ est donnée par le vecteur $e_1 + e_2 + e_3$ et la dimension de $\ker(T - id_E)$ vaut 1.

c) $xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $\ker(T^2 + id_E)$, $x, y, z \in \mathbb{K}$, si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et finalement, si et seulement si, $x - y + z = 0$. Ainsi, une base de $\ker(T^2 + id_E)$ est donnée par les vecteurs $e_1 - e_3$ et $e_2 + e_3$ et la dimension de $\ker(T^2 + id_E)$ vaut 2.

d) Les trois vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - e_3$ et $u_3 = e_2 + e_3$ sont linéairement indépendants et forment donc une base de E qui est un espace de dimension 3. Dans cette base, T et T^2 se représentent respectivement par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de calculer les composantes des Tu_i dans la base (u_1, u_2, u_3).

4. [4 points] Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

On fournira une matrice S et la matrice réduite $S^{-1}MS$ correspondante.

Solution :

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 7/6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 6 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. [3 points] On considère un $\mathbb{C}$-vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme T de E et des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ stables pour T et tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$. On note $T_j : E_j \to E_j$ la restriction de T à E_j, $j = 1, \ldots, p$, montrer que le polynôme caractéristique de T est le produit des polynômes caractéristiques des T_j, c'est-à-dire

$$\chi_T(\lambda) = \chi_{T_1}(\lambda) \cdots \chi_{T_p}(\lambda).$$

Solution : On considère une base $(e_{i,1}, \ldots, e_{i,d_i})$ de chacun des sous-espaces E_i où $\dim E_i = d_i$, pour $i = 1, \ldots, p$. Au vu des hypothèses, l'union de ces bases forme une base U de E. Si A_i représente T_i dans la base $(e_{i,1}, \ldots, e_{i,d_i})$, alors T se représente dans la base U par la matrice $\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$. Dès lors, on a

$$\chi_T(\lambda) = \det(\mathrm{diag}(A_1 - \lambda I_{d_1}, \ldots, A_p - \lambda I_{d_p})) = \Pi_{i=1}^p \chi_{T_i}(\lambda).$$

Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
juin 2009

Fin de l'examen **12h30** !

6. [3 points] Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que G muni du produit usuel de matrices est un groupe commutatif. Calculer la puissance n-ième, pour tout n entier, de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : il est aisé de vérifier que le produit de deux éléments de G est interne, associatif, commutatif et que pour $x = 0$, la matrice I appartient à G et joue le rôle de neutre. L'inverse de

$$\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui appartient bien à G. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. [3 points] Etudier le rang de la matrice suivante, en fonction du paramètre complexe t,

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Solution : Si $t = 1$, le rang de A vaut 1; si $t = -3$, le rang de A vaut 3 et enfin, si $t \notin \{1, -3\}$, le rang de A vaut 4.

8. [4 points] Soient E un $\mathbb{K}$-vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + \cdots + F_p$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1 \subseteq F_1$, $\ldots$, $G_p \subseteq F_p$ tels que $E = G_1 \oplus \cdots \oplus G_p$.

Solution : Considérons une base $(e_{i,1}, \ldots, e_{i,d_i})$ de chacun des sous-espaces vectoriels F_i où $\dim F_i = d_i$, $i = 1, \ldots, p$. L'union U de ces bases forme une partie génératrice de E (car $E = F_1 + \cdots + F_p$). Toute partie génératrice de E contenant une base de E, on peut extraire de U une base $f_1, \ldots, f_n$ de E. C'est avec ces derniers vecteurs que l'on va construire les G_i. Il suffit de définir G_i comme l'enveloppe linéaire des vecteurs appartenant à $\{f_1, \ldots, f_n\} \cap F_i$ mais de telle façon qu'un même vecteur f_k n'appartienne pas à deux sous-espaces G_i et G_j distincts. Pour ce faire, on peut poser

$$\begin{gathered}
G_1 = \rangle \{f_1, \ldots, f_n\} \cap F_1 \langle \\
G_2 = \rangle (\{f_1, \ldots, f_n\} \cap F_2) \setminus G_1 \langle \\
\vdots \\
G_p = \rangle (\{f_1, \ldots, f_n\} \cap F_p) \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{p-1}) \langle .
\end{gathered}$$

Il se peut que certains G_i soient vides (ce n'est pas gênant). Par construction, il est clair que $G_i \subseteq F_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Puisque $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est inclus dans $G_1 \cup \cdots \cup G_p$, on a $E = G_1 + \cdots + G_p$. Il reste à vérifier que cette somme directe. Si $0 = g_1 + \cdots + g_p$ avec les $g_i \in G_i$ non tous nuls, on obtiendrait une relation linéaire non triviale entre les éléments de la base $f_1, \ldots, f_n$. Ceci est impossible.