Examen écrit de géométrie

Premier bachelier en sciences physiques, juin 2009

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. Bon travail !

1. Soient $\mathcal{A}$ un espace affin construit sur un espace vectoriel E et A, B, C trois points de $\mathcal{A}$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel x, l'expression

$$(1-x)A + x^2B - xC$$

a) représente-t-elle un point de $\mathcal{A}$?
b) représente-t-elle un vecteur de E ?

2. Dans un plan affin, on considère un triangle ABC et une parallèle à BC ne passant ni par A ni par B et coupant respectivement les segments $[A, B]$ en B' et $[A, C]$ en C'. Montrer que la droite passant par A et par l'intersection des droites BC' et CB' coupe les segments $[B, C]$ et $[B', C']$ en leur milieu.

3. Dans l'espace affin euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le plan π d'équation $3x + y - z = 5$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A de coordonnées $(-1, 0, 2)$ et de vecteur directeur de composantes $(2, 3, 1)$.

a) Donner des équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}$.
b) Donner une équation cartésienne d'un plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et le point de coordonnées $(5, 2, 1)$.
c) Donner les coordonnées de la projection orthogonale du point B de coordonnées $(-4, -1, 4)$ sur le plan π. Calculer la distance de π à B.
d) Donner des équations cartésiennes de la droite obtenue à partir de la droite $\mathcal{D}$ par symétrie orthogonale par rapport à π.

4. Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormé positive, on considère les vecteurs u et v de composantes respectives $(3, \sqrt{3})$ et $(-1, -\sqrt{3})$. Déterminer l'angle orienté entre u et v.

5. Soient trois nombres réels $R, r, d > 0$ tels que $R > r$. Dans le plan affin euclidien, on considère une *hypotrochoïde* de paramétrage

$$P(u) = \left((R-r)\cos u + d\cos(\frac{R-r}{r}u), (R-r)\sin u - d\sin(\frac{R-r}{r}u) \right).$$

a) Pour $d = 2$, $R = 6$, $r = 2$ et $u \in]0, 2\pi[$:
   - S'agit-il d'un arc régulier de courbe ?
   - S'il s'agit en fait d'une union d'arcs réguliers de courbe, quels points de $]0, 2\pi[$ posent problème ?
   - En un point où elle est définie, donner l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

b) Pour $d = 1$, $R = 2r$, $r \neq 1$ et $u \in]0, 2\pi[$, montrer qu'il s'agit d'une ellipse.