Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
juin 2009

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 10h30.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

1. (3 points) Soient $A \in \mathbb{C}_n^n$ une matrice non nulle et 0_n la matrice nulle $n \times n$. La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{2n}^{2n}$$

est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Solution : Une première solution est de remarquer que $B^2 = 0$. Ainsi, B étant une matrice nilpotente non nulle, elle ne peut pas être diagonalisable (cf. résultat sur les endomorphismes nilpotents).

Une solution plus classique est la suivante. Il est clair que $\det(B - \lambda I) = (-\lambda)^{2n}$. Ainsi, 0 est l'unique valeur propre de B de multiplicité algébrique $2n$. L'espace propre associé à 0 est

$$\{x \in \mathbb{C}^{2n} \mid Bx = 0\}.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension $2n - \mathrm{rg}(B) = 2n - \mathrm{rg}(A) < 2n$ car A étant non nulle, on a $\mathrm{rg}(A) > 0$. Ainsi, les multiplicités algébrique et géométrique de la valeur propre 0 étant différentes, B n'est pas diagonalisable.

2. (4 points) Soient $n \geq 2$ un entier et la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}_n^n$ définie pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ par

$$a_{i,j} = \frac{i}{j}.$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ? En cas de réponse affirmative, la diagonaliser.

Solution : On a

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}\\ 2 & \frac{2-2\lambda}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{n}\\ 3 & \frac{3}{2} & \frac{3-3\lambda}{3} & \cdots & \frac{3}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \cdots & \frac{n-n\lambda}{n}\end{pmatrix}.$$

Par linéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on a

$$\det(A-\lambda I)=\frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2-2\lambda & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3-3\lambda & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n-n\lambda\end{pmatrix}.$$

Ensuite[1], on peut considérer les transformations élémentaires suivantes

$$L_2 \leftarrow L_2-2L_1,\dots,L_n\leftarrow L_n-nL_1$$

pour obtenir

$$\det(A-\lambda I)=\frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2\lambda & -2\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 3\lambda & 0 & -3\lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n\lambda & 0 & 0 & \cdots & -n\lambda\end{pmatrix}.$$

Enfin, on effectue $C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n$, pour se ramener à une matrice triangulaire et on trouve

$$\det(A-\lambda I)=\frac{1}{n!}\det\begin{pmatrix}n-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -2\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -3\lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n\lambda\end{pmatrix}=(-1)^{n-1}(n-\lambda)\lambda^{n-1}.$$

Pour trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre 0, il suffit de résoudre $AX=0$. Ce système est trivialement équivalent à l'unique équation

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}=0.$$

L'ensemble des solutions est donc bien un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ ayant pour base $S_1=(1,-2,0,\dots,0)\tilde{},\dots,S_{n-1}=(1,0,\dots,0,-n)\tilde{}$. Il reste à trouver un vecteur propre non nul de A de valeur propre n. Le vecteur $S_n=(1,2,\dots,n)$ convient. En effet, $AS_n=nS_n$. La matrice $S=\begin{pmatrix}S_1 & \cdots & S_n\end{pmatrix}$ est telle que

$$S^{-1}AS=\operatorname{diag}\left(0,\dots,0,n\right).$$

Une solution alternative consistait à exploiter le fait que $A^2-n.A=0$.

[1] On pourrait aussi faire jouer la linéarité sur les lignes, pour faire "sortir" $n!$.

3. (5 points) Soit $\mathbb{C}[X]_{\leq 2}$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des polynômes de degré au plus 2 à coefficients complexes. Soit α un nombre complexe. On considère l'application linéaire

$$T : \mathbb{C}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[X]_{\leq 2}$$

qui à P associe le reste de la division de $X^3.P$ par $X^3 - X^2 - X - \alpha$.

a) Représenter T dans la base $(1, X, X^2)$.

b) A quelle(s) condition(s) sur α, T est-il un isomorphisme ?

c) Si $\alpha = 0$, caractériser les éléments de $\mathbb{C}[X]_{\leq 2}$ appartenant à $\ker T$.

d) Si $\alpha = 0$, quel est le rang de T ?

Solution : Soit un polynôme $P(X) = aX^2+bX+c$. La division euclidienne de $X^3.P$ par $X^3 - X^2 - X - \alpha$ donne

$$\begin{aligned} X^3.P &= (aX^2 + (a+b)X + 2a + b + c).(X^3 - X^2 - X - \alpha) \\ &+ \alpha(2a+b+c) + (2a+b+c+(a+b)\alpha)X + (3a+2b+c+a\alpha)X^2. \end{aligned}$$

On aurait pu ne pas réaliser ce calcul mais, séparement, calculer les divisions euclidiennes de X^3, X^4 et X^5 par $X^3 - X^2 - X - \alpha$.

a) Pour $a = b = 0$ et $c = 1$, on trouve $T(1) = \alpha + X + X^2$. Pour $a = c = 0$ et $b = 1$, on trouve $T(X) = \alpha + (1+\alpha)X + 2X^2$. Enfin, pour $b = c = 0$ et $a = 1$, on a $T(X^2) = 2\alpha + (2+\alpha)X + (3+\alpha)X^2$. Ayant à notre disposition, les images par T des vecteurs de base, on obtient la représentation matricielle suivante

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 1+\alpha & 2+\alpha \\ 1 & 2 & 3+\alpha \end{pmatrix}.$$

b) L'application T est un isomorphisme si et seulement si M est inversible. Or, il vient facilement que $\det M = \alpha^3$. Ainsi, T est un isomorphisme si et seulement si $\alpha \neq 0$.

c) On peut une fois encore exploiter la représentation matricielle en résolvant $MX = 0$. Ainsi, les éléments du noyau ont des composantes (x, y, z) dans la base $(1, X, X^2)$ satisfaisant

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $x = y = -z$. Par conséquent,

$$\ker T = \{a + aX - aX^2 \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

d) Puisque le noyau de T est de dimension 1, l'image de T est dimension $3 - 1 = 2$ et pour rappel, $\operatorname{rg} T = \dim(\operatorname{Im} T)$.

4. (8 points) A toute matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

appartenant au $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}_2^2$, on associe l'application

$$\varphi_A : \mathbb{C}_2^2 \to \mathbb{C}_2^2, \; M \mapsto AM - MA.$$

a) Vérifier que pour tout $B \in \mathbb{C}_2^2$, φ_B est un endomorphisme de $\mathbb{C}_2^2$.

Solution : Il est clair que pour toutes matrices $M, N \in \mathbb{C}_2^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\varphi_B(M+N) = B(M+N)-(M+N)B = BM-MB+BN-NB = \varphi_B(M)+\varphi_B(N)$ et $\varphi_B(\lambda M) = B(\lambda M) - (\lambda M)B = \lambda(BM-MB) = \lambda\varphi_B(M)$.

b) <u>Déduire</u> du point précédent que le *centralisateur* de B,

$$\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathbb{C}_2^2 \mid BM = MB\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_2^2$.

Solution : On remarque que $\mathcal{C}(B)$ est en fait le noyau de φ_B. Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_2^2$.

c) Représenter φ_A dans une base de $\mathbb{C}_2^2$ de votre choix.

Solution : Considérons la base de $\mathbb{C}_2^2$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\varphi_A(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \; \varphi_A(E_2) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\varphi_A(E_3) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}, \; \varphi_A(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice représentant φ_A dans la base $(E_1, \ldots, E_4)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

d) Vérifier que rg $\varphi_A = 2$ si et seulement si

$$(a, b, c, d) \in \mathbb{C}_4 \setminus \{(m, 0, 0, m) \mid m \in \mathbb{C}\}.$$

Solution : Tout d'abord, si $a = d$, il est clair que la matrice M est de rang 2 si et seulement si $(b, c) \neq (0, 0)$.

Ensuite, si $a \neq d$, la matrice M est de rang au moins 2 puisque la sous-matrice $M_{(2,3;2,3)}$ a un déterminant non nul. En fait, quelles que soient les valeurs de a et d, le rang de M vaut 2. Il suffit de vérifier que les 4 matrices qui bordent $M_{(2,3;2,3)}$ ont un déterminant nul. On peut même se limiter aux deux déterminants suivant

$$\det\begin{pmatrix} -c & b & 0 \\ a-d & 0 & b \\ 0 & d-a & -c \end{pmatrix} = 0, \ \det\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ -b & a-d & 0 \\ c & 0 & d-a \end{pmatrix} = 0$$

car les lignes L_1 et L_4 sont opposées.

e) Si rg $\varphi_B = 2$, démontrer que $\mathcal{C}(B) = \rangle I, B \langle$.

Solution : Comme montré au point b), $\mathcal{C}(B)$ est le noyau de φ_B. Puisque par hypothèse, rg $\varphi_B = 2$, on en conclut que

$$\dim \mathcal{C}(B) = \dim \mathbb{C}_2^2 - \operatorname{rg} \varphi_B = 4 - 2 = 2.$$

D'autre part, il est clair que I et B appartiennent à $\mathcal{C}(B)$ puisque ces deux matrices commutent trivialement avec B. Si I et B sont linéairement indépendants, on a donc trouvé une base de $\mathcal{C}(B)$ ce qui suffit. Notons[2] que si I et B étaient linéairement dépendants, B serait multiple de l'identité. Dans ce cas, toute matrice de $\mathbb{C}_2^2$ commutant avec B, on en conluerait que $\dim \mathcal{C}(B) = 4$ et donc que rg $\varphi_B = 4$.

f) Démontrer que pour toute matrice $B \in \mathbb{C}_2^2$, on a

$$\rangle I, B \langle = \mathbb{C}[B]$$

où $\mathbb{C}[A]$ désigne l'ensemble des polynômes de la matrice A.

Solution : Il est clair que $\rangle I, B \langle \subseteq \mathbb{C}[B]$. Considérons l'autre inclusion. Soit $P(B) = a_k B^k + \cdots + a_0 I \in \mathbb{C}[B]$. On a $B.P(B) = P(B).B$. Autrement dit, $P(B)$ appartient à $\mathcal{C}[B]$.

Si rg $\varphi_B = 2$, on conclut par le point précédent, $\mathbb{C}[B] \subseteq \mathcal{C}[B] = \rangle I, B \langle$.

Si rg $\varphi_B \neq 2$, le point d) nous apprend que B est un multiple de l'identité, i.e., $B = \lambda I$. Dans ce cas, $P(B) = P(\lambda)\, I$ autrement dit, $\mathbb{C}[B] \subseteq \rangle I \langle$.

g) Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \beta \neq 0.$$

Montrer que φ_C est nilpotent, en calculer l'indice de nilpotence et fournir une chaîne de longueur maximum.

Solution : Ici, la matrice représentant φ_C dans la base $(E_1, \ldots, E_4)$ est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ N^3 = 0.$$

Une chaîne de longueur maximum est donc donnée par E_3, NE_3, N^2E_3.

---

[2]Une alternative est de remarquer que le point d) stipule que B n'est pas un multiple de l'identité si et seulement si le rang de ϕ_B vaut 2.

Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
juin 2009

Fin de l'examen **12h30** !

5. (4 points) Discuter et résoudre le système

$$\begin{cases} a\,x + a^2\,y = a^3 \\ b^3\,x + b^2\,y = b \\ x + y = a \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

Solution : La matrice du système et la matrice augmentée sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ b^3 & b^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (A|b) = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b^3 & b^2 & b \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Le rang de A vaut au moins 1. Les sous-matrices bordant le coin inférieur gauche sont

$$\begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b^3 & b^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant respectif $a(1-a)$ et $b^2(b-1)$.

• Si $a \notin \{0,1\}$ ou $b \notin \{0,1\}$, alors $\operatorname{rg} A = 2$ et $\det(A|b) = ab(1-a)(ab-1)$. Dans ce cas, si $a \neq 1/b$, alors rg $(A|b) = 3$ et le système est incompatible. Si $a = 1/b$, les deux premières lignes sont multiples l'une de l'autre et le système est équivalent au système de Cramer suivant

$$\begin{cases} b^3\,x + b^2\,y = b \\ x + y = 1/b \end{cases}$$

qui a pour unique solution $(x,y) = (0, 1/b)$.

• Si $a, b \in \{0,1\}$. On peut considérer les 4 cas séparément.

- $a = b = 0$, le système se réduit à $x + y = 0$ ayant pour solution $\{(\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- $a = 0$, $b = 1$ donnent un système clairement incompatible.
- $a = 1$, $b = 0$, le système se réduit à $x + y = 1$ ayant pour solution $\{(\lambda, 1-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Idem dans le cas $a = b = 1$.

6. (2 points)

a) Les éléments suivants sont-ils inversibles dans $\mathbb{Z}_{128}$,

$$\alpha = 15 \quad \text{et} \quad \beta = 46.$$

Si oui, quel est leur inverse ?

b) Que pouvez-vous en déduire sur le caractère bijectif des applications

$$\Phi_\alpha : \mathbb{Z}_{256} \to \mathbb{Z}_{256} : x \mapsto 15\,x$$

et

$$\Phi_\beta : \mathbb{Z}_{256} \to \mathbb{Z}_{256} : x \mapsto 46\,x.$$

Solution : On a $128 = 2^7$, $15 = 3.5$ et $46 = 2.23$. Ainsi 15 est inversible modulo 128 (car premier avec 128) mais pas 46. Il vient $128 = 8.15 + 8$, $15 = 1.8 + 7$, $8 = 1.7 + 1$. De là, $1 = 8 - 7 = 128 - 8.15 - (15 - 8)$ et $1 = 128 - 9.15 + 128 - 8.15 = 2.128 - 17.15$. Par conséquent, $(15)^{-1} = -17 = 111 \bmod 128$.

L'application Φ_β n'est pas bijective. Elle n'est pas injective. Par exemple, $\Phi_\beta(0) = 0$ et $\Phi_\beta(64) = 46.64 = 23.128 = 0 \bmod 128$. En se ramenant aux définitions de l'injectivité et de la surjectivité, on démontre facilement que Φ_α est bijectif en exploitant le fait que 15 est inversible modulo 128.

7. (4 points) Soit $\mathbb{C}_2^2$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes considéré comme un espace vectoriel **réel** E. On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & i\,b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Suggestion : pour les distraits, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; on considère uniquement des combinaisons linéaires à coefficients réels.)

a) Montrez que A est un sous-espace vectoriel de E.

Solution : On vérifie aisément que $0 \in A$ et que A contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

b) Déterminez une base et la dimension de A.

Solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

c) Soit H le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices hermitiennes. Sachant que sa dimension comme sous-espace de E est 4, en déduire la dimension de $A + H$.

Solution : Cela revient en fait à determiner la dimension de $A \cap H$ car

$$\dim(A + H) = \dim A + \dim H - \dim(A \cap H) = 8 - \dim(A \cap H).$$

Une matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & i\,b \end{pmatrix}$ de A avec $a \in \mathbb{C}$ et $b, c \in \mathbb{R}$ est hermitienne si et seulement si $a = \overline{a}$, i.e., a est réel, et $b = c = 0$. Autrement dit, $\dim(A \cap H) = 1$ et $\dim(A + H) = 7$.