Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
juin 2008

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées.
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 10h30.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

1. (5 points) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice M est-elle diagonalisable ? Lorsqu'elle est diagonalisable, fournir une matrice S qui la diagonalise et donner la forme diagonale correspondante.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, pour quelles valeurs de α, M est-elle unitaire ?

Solution. On trouve $\det(M - \lambda I) = (\lambda - \alpha - 1)^2(\lambda + \alpha - 1)^2$. Si $\alpha = 0$, 1 est l'unique valeur propre de M. Dans ce cas, puisque $M = I$, M est trivialement diagonalisable (par toute matrice inversible S, $S = I$ convient). Si $\alpha \neq 0$, M possède deux valeurs propres distinctes $\alpha + 1$ et $-\alpha + 1$ toutes deux de multiplicité (algébrique) 2. En résolvant

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1-\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour $\lambda = \alpha + 1$, on trouve $x = t$ et $y = z$. De là, l'espace propre $E_{\alpha+1}$ est $\rangle e_1 + e_4, e_2 + e_3 \langle$ de dimension 2. En procédant de la même manière pour $\lambda = -\alpha + 1$, on trouve $x = -t$ et $y = -z$. De là, l'espace propre $E_{-\alpha+1}$ est $\rangle e_1 - e_4, e_2 - e_3 \langle$ de dimension 2. Puisque pour les deux valeurs propres, les multiplicités algébriques et géométriques coïncident, M est diagonalisable et la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}MS = \mathrm{diag}(\alpha+1, \alpha+1, -\alpha+1, -\alpha+1).$$

En conclusion, M est donc diagonalisable pour toute valeur de α.

Pour que $MM^* = I$, en calculant l'élément $(MM^*)_{1,1}$, on s'aperçoit qu'il est nécessaire que $1 + \alpha\overline{\alpha} = 1$ et donc que $\alpha = 0$. Cette condition est aussi trivialement suffisante.

2. (4 points) En rappelant les résultats théoriques utilisés, montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{C}_2^2$, on a

$$A^2 - (\mathrm{tr}A)\,A + (\det A)\,I = 0.$$

Montrer ensuite que, pour toute matrice $A \in \mathbb{C}_3^3$, on a

$$A^3 - (\mathrm{tr}A)\,A^2 + \frac{1}{2}((\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2)\,A - (\det A)\,I = 0.$$

Solution. Le théorème de Cayley-Hamilton stipule que $\chi_A(A) = 0$. Pour une matrice 2×2, on a $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\,\lambda + \det A$ (c'est une application immédiate du résultat explicitant les coefficients de χ_A). Cela suffit pour répondre à la première partie de la question. Pour une matrice 3×3, on a

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\mathrm{tr}A)\,\lambda^2 - \alpha\lambda + \det A$$

où α est la somme des sous-matrices diagonales de dimension 2 de A. Ainsi, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ alors } \alpha = ae - bd + ai - cg + ei - fh.$$

De plus, on a

$$(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2 = (a+e+i)^2 - (a^2 + bd + cg + bd + e^2 + fh + cg + fh + i^2).$$

Il suffit alors de vérifier que $2\alpha = (\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2$ en développant le carré.

3. (7 points) Soit l'ensemble $\mathbb{R}_2^2$ des matrices 2×2 à coefficients réels, considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel. On définit deux applications $S, T : \mathbb{R}_2^2 \to \mathbb{R}_2^2$ par respectivement

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2a-b \\ b+d & 2c-d \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que S est linéaire.

b) Caractériser le noyau de S (i.e., donner la forme explicite de ses éléments).
c) Quel est le rang de S ?
d) Sachant que l'application T est linéaire, T est-il un isomorphisme ?
e) En explicitant une base de $\mathbb{R}^2_2$, représenter S et T dans cette base.
f) L'application $T \circ S : A \mapsto T(S(A))$ est-elle linéaire ? Si tel est le cas, représenter $T \circ S$ dans la base choisie au point précédent.
g) Calculer
$$T^{369}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
h) Un point fixe de T est une matrice A telle que $TA = A$. L'ensemble des points fixes de T est-il un sous-espace espace vectoriel de $\mathbb{R}^2_2$? Et le cas échéant, en donner la dimension.

Justifier vos réponses.

Solution.

a) Pour tous $A, B \in \mathbb{R}^2_2$, on a $S(A+B) = S(A) + S(B)$. Enfin, pour tout $A \in \mathbb{R}^2_2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $S(\lambda A) = \lambda S(A)$. Cela découle immédiatement de la définition des opérations matricielles d'addition et de multiplication par un scalaire.
b) Cela revient à résoudre le système
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a - b = 0 \\ b + d = 0 \\ 2c - d = 0 \end{cases}$$
Ainsi,
$$\ker S = \{\begin{pmatrix} -\lambda/2 & -\lambda \\ \lambda/2 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
c) Le point précédent montre que $\dim \ker S = 1$. Puisque $\dim \ker S + \operatorname{rg} S = \dim \mathbb{R}^2_2$, on en tire que le rang de S vaut 3.
d) On remarque que l'élément se trouvant à la deuxième ligne, première colonne est invariant. Pour les 3 autres éléments, T agit comme une permutation. Il s'agit donc bien d'une application linéaire bijective. (On pouvait aussi bien évidemment vérifier le caractère injectif et surjectif de l'application T.)
e) Dans la base
$$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}),$$
T et S se représentent respectivement par les matrices
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

f) La composée d'applications linéaires est encore une application linéaire. Pour obtenir la matrice cherchée, il suffit d'effectuer le produit matriciel suivant
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Il suffit de remarquer que $T^3 = id = T^{3i}$ pour tout $i \geq 0$. Donc,
$$T^{369}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

h) La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un point fixe de T si et seulement si $a = b = d$. Ainsi, l'ensemble des points fixes est
$$\{\begin{pmatrix} a & a \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}\}.$$
Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2.

4. (4 points) Réduire à la forme canonique de Jordan la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Sachant que $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^4$, on donnera une matrice S et la forme de Jordan $S^{-1}AS$ correspondante.

Solution. Tout d'abord la matrice
$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
est de rang 2. Ainsi, E_2 est de dimension $4 - 2 = 2$ et la matrice A n'est donc pas diagonalisable (puisque la mutliplicité géométrique de la valeur propre 2 est strictement inférieure à sa multiplicité algébrique). On calcule ensuite $(A - 2I)^2 = 0$. Ainsi, la première colonne du tableau réparti en chaînes (engendrées par $A - 2I$) contient $4 - \text{rg}(A - 2I) = 2$ éléments et la deuxième colonne en contient $\text{rg}(A - 2I) - \text{rg}(A - 2I)^2 = 2 - 0 = 2$. Il faut donc trouver deux chaînes de longueur 2 linéairement indépendantes. Les chaînes
$$e_1, (A - 2I)e_1 \text{ et } e_4, (A - 2I)e_4$$

répondent à la question car les première et quatrième colonnes de $A - 2I$ sont clairement linéairement indépendantes. Ainsi, la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
juin 2008

Fin de l'examen **12h30** !

5. (6 points) Soit $n \geq 3$ un entier. On considère l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels dont seuls les éléments se trouvant sur la diagonale principale ou sur la diagonale secondaire peuvent être non nuls. Par exemple, la matrice suivante appartient à $\mathcal{D}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que le produit de deux matrices quelconques de $\mathcal{D}_n$ appartient à $\mathcal{D}_n$.
b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^n_n$? Si oui, quelle en est sa dimension ?
c) Son complémentaire $\mathbb{R}^n_n \setminus \mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n_n$?
d) Expliciter un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n_n$ tel que $\mathcal{D}_n \oplus F = \mathbb{R}^n_n$.
e) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_5.$$

Quelle est la forme générale de M^k, pour tout $k \geq 1$. La formule obtenue sera démontrée par récurrence sur k.

f) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}.$$

A quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d, e, la matrice A est-elle inversible ? Dans de telles conditions, quel est l'inverse de A ?

Solution.

a) Les matrices de $\mathcal{D}_n$ sont caractérisées par la propriété suivante. Une matrice A appartient à $\mathcal{D}_n$ si et seulement si, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, si $j \neq i$ et $j \neq n - i + 1$, alors $A_{i,j} = 0$. (Ou, en contraposant, si $A_{i,j} \neq 0$, alors $i = j$ ou $i = n - i + 1$.) Soient A, B deux matrices de $\mathcal{D}_n$. Il vient

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} = A_{i,i} B_{i,j} + A_{i,n-i+1} B_{n-i+1,j}$$

sauf dans le cas n impair et $i = (n+1)/2$, on a

$$[AB]_{i,j} = A_{i,i} B_{i,j}.$$

Ensuite, si $j \neq i$ et $j \neq n - i + 1$, alors $B_{i,j} = 0$ et on s'aperçoit que $B_{n-i+1,j} = 0$. De là, $[AB]_{i,j} = 0$, ce qui suffit.

b) Il est clair la matrice nulle appartient à $\mathcal{D}_n$. Au vu de la caractérisation de $\mathcal{D}_n$ donnée au point précédent, cet ensemble contient effectivement les combinaisons linéaires de ses éléments. Si n est impair, la dimension de $\mathcal{D}_n$ vaut $2n - 1$ (les deux diagonales ont un élément commun). Par contre, si n est pair, la dimension de $\mathcal{D}_n$ vaut $2n$.

c) Le complémentaire ne contenant pas la matrice nulle, il ne peut s'agir d'un sous-espace vectoriel.

d) Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices dont les éléments des diagonales principale et secondaire sont nuls. Autrement dit, les éléments de $\mathcal{E}_n$ sont caractérisés par la propriété suivante. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, si $j = i$ ou $j = n - i + 1$, alors $A_{i,j} = 0$. Par des raisonnements analogues à ceux développés ci-dessus, il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel et $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{D}_n = \{0\}$. Enfin, il est clair que toute matrice de $\mathbb{R}^n_n$ s'obtient comme somme d'une matrice de $\mathcal{E}_n$ et de $\mathcal{D}_n$. (On aurait également pu utiliser le fait qu'une telle décomposition est trivialement unique pour conclure que la somme est directe.)

e) Montrons que pour tout $k \geq 1$,

$$M^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Le cas de base $k = 1$ est immédiat. Si la propriété est satisfaite pour $k \geq 1$, montrons qu'elle l'est encore pour $k+1$. Il vient

$$M^{k+1} = M.M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

et la conclusion suit.

f) Le déterminant de A vaut $c(ae - db)$. Ainsi A est inversible si $c \neq 0$ et $ae \neq db$. Dans ce cas, l'inverse de A est donné par

$$\frac{1}{c(ae-bd)} \begin{pmatrix} ce & 0 & -cb \\ 0 & ae-bd & 0 \\ -cd & 0 & ac \end{pmatrix}.$$

6. (4 points) Discuter et résoudre le système suivant en fonction du paramètre réel a,

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ ax + ay + 2z = 2. \end{cases}$$

Solution. La matrice du système est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}.$$

L'élément du coin supérieur gauche étant 1, le rang de A vaut au moins 1. Les sous-matrices de dimension 2 bordant cet élément ont pour déterminant respectivement $a(1-a)$ et $2(1-a)$. Ainsi, si $a \neq 1$, le rang de A vaut 2, sinon, il est égal à 1. Si $a = 1$, la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ a & a & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

est de rang 2 (le déterminant construit sur les deux dernières colonnes diffère de zéro). Le système est donc incompatible. Par contre, si $a \neq 1$, le rang de A étant déjà maximal, le rang de la matrice augmentée lui est égal et le système est compatible. Si on soustrait les deux équations, on trouve $x = 2/(a-1)$ et $ay + 2z = 2/(1-a)$. De là l'ensemble des solutions est donné par

$$\{(2/(a-1), \lambda, 1/(1-a) - a\lambda/2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$