Examen écrit d'algèbre/géométrie

Premier bachelier en sciences physiques,
jeudi 31 mai 2007

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 11h00.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice M est-elle normale ? Représenter graphiquement ces valeurs dans le plan complexe.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha = 1$, diagonaliser M par une matrice unitaire U. Dans ce cas, donner explicitement U et la matrice diagonale correspondante.

solution. La matrice M est normale si $MM^* = M^*M$. Cette condition donne

$$\begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha^2+\overline{\alpha} & 0 \\ \alpha+\overline{\alpha}^2 & 2|\alpha|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha+\overline{\alpha}^2 & 0 \\ \alpha^2+\overline{\alpha} & 2|\alpha|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

qui est équivalent à

$$\alpha + \overline{\alpha}^2 = \alpha^2 + \overline{\alpha}$$

ou encore à

$$\alpha^2 - \overline{\alpha}^2 + \overline{\alpha} - \alpha = 0$$

et le premier membre se factorise en

$$(\underbrace{\alpha - \overline{\alpha}}_{2i\,\mathfrak{Im}\,\alpha})(\underbrace{\alpha + \overline{\alpha}}_{2\mathfrak{Re}\,\alpha} - 1) = 0.$$

En conclusion, M est une matrice normale si et seulement si $\mathfrak{Re}\,\alpha = 1/2$ ou $\mathfrak{Im}\,\alpha = 0$; la représentation graphique s'en déduit aisément.

Pour $\alpha = 1$, on trouve facilement que M possède trois valeurs propres simples 2, 1 et 0 ayant respectivement comme vecteur propre normé

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice U ayant ces trois vecteurs pour colonnes est telle que $U^*MU = \mathrm{diag}\,(2,1,0)$.

2. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} M^n.$$

(*Suggestion*: diagonaliser tout d'abord M. *Pour rappel*: une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de matrices converge vers une matrice B, si pour tous i, j, la suite numérique $([A_n]_{i,j})_{n\geq 0}$ converge vers $B_{i,j}$.)

solution. La matrice M a 1 comme valeur propre simple et $1/2$ comme valeur propre double. On vérifie facilement que la multiplicité géométrique de $1/2$ vaut 2. La matrice M est donc diagonalisable. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est telle que $S^{-1}MS = \mathrm{diag}\,(1, 1/2, 1/2)$. On remarque que

$$\begin{aligned} M^n &= (S\,\mathrm{diag}\,(1,1/2,1/2)\,S^{-1})^n = S\,[\mathrm{diag}\,(1,1/2,1/2)]^n S^{-1} \\ &= S\,\mathrm{diag}\,(1, 1/2^n, 1/2^n)\,S^{-1}. \end{aligned}$$

De là,

$$B = \lim_{n\to\infty} M^n = S\,\mathrm{diag}\,(1,0,0)\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Dans un espace affin euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(1,2,8)$ et $(4,3,6)$ et le vecteur u de composantes $(0,1,3)$. Soit le plan π d'équation cartésienne

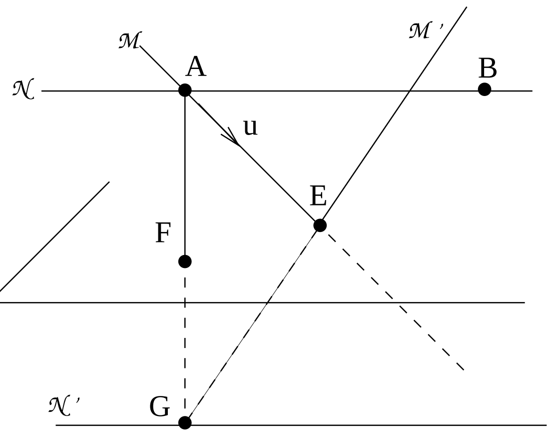
$$\pi \equiv x + y + 2z = 5.$$

Donner des équations cartésiennes

- du symétrique orthogonal par rapport à π, de la droite $\mathcal{M}$ passant par A et parallèle à u.
- du symétrique orthogonal par rapport à π de la doite $\mathcal{N}$ passant par A et B.

(*Suggestion*: Considérer la position de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$ par rapport à π.)

solution Une équation du sous-vectoriel directeur de π est donnée par $x + y + 2z = 0$. Les composantes du vecteur u ne satisfont pas cette équation. Par contre, les composantes de $\overrightarrow{AB}$, à savoir $(3, 1, -2)$, satisfont l'équation. On peut donc en conclure que $\mathcal{M}$ intersecte π en un point unique et que $\mathcal{N}$ et π sont parallèles (et même strictement parallèles car A ne vérifie pas l'équation de π).



Des équations de $\mathcal{M}$ sont données par

$$\begin{cases} x = 1 \\ 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, pour obtenir les coordonnées de l'intersection de $\mathcal{M}$ et de π, il suffit de résoudre le système formé des deux équations précédentes et de l'équation de π. On trouve l'unique solution

$$(1, 0, 2).$$

Ces coordonnées sont celles d'un premier point E du symétrique orthogonal de $\mathcal{M}$ par rapport à π.

Considérons la droite passant par A et orthogonale à π (i.e., ayant $(1, 1, 2)$ comme vecteur directeur). Cette droite a pour équations

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - z = -6 \end{cases}$$

Encore une fois, en considérant le système formé de ces deux équations et de l'équation cartésienne de π, on trouve les coordonnées $(-4/3, -1/3, 10/3)$ d'un point F. Un deuxième point du symétrique orthogonal de $\mathcal{M}$ par rapport à π est donné par $G = A + 2\overrightarrow{AF}$ qui a pour coordonnées

$$(-11/3, -8/3, -4/3).$$

Dès lors, la droite recherchée est la droite EG d'équations

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

Pour la deuxième partie de la question, puisque la droite AB est parallèle à π, le symétrique orthogonal recherché passe par les points $G = A + 2\overrightarrow{AF}$ et $H = B + 2\overrightarrow{AF}$ de coordonnées respectives $(-11/3, -8/3, -4/3)$ et $(-2/3, -5/3, -10/3)$. On trouve les équations

$$\frac{x+2/3}{3} = y + 5/3 = \frac{z+10/3}{-2}$$

Une réponse alternative directe aurait été de considéré la droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ (ce qui revient au même).

4. Dans un plan affin muni du repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, on considère l'application affine $\mathcal{T}$ définie par $\mathcal{T}(O) = O$, $\mathcal{T}(A) = B$ et $\mathcal{T}(B) = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}B$.

a) Représenter $\mathcal{T}$ dans ce repère.

b) Quelles sont les coordonnées dans ce repère de l'image par $\mathcal{T}$ du point $A + \overrightarrow{OB}$?

solution. Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{T}(O)\mathcal{T}(A)} = \overrightarrow{OB}$ a pour composantes $(0, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{T}(O)\mathcal{T}(B)} = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}O$ a pour composantes $(0, 1/2)$. Ainsi, la matrice qui représente $\mathcal{T}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et un point de coordonnées (x, y) est envoyé sur

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

car O est invariant par $\mathcal{T}$. Pour conclure, le point dont il est question en b) a pour coordonnées $(1, 1)$ et donc son image a pour composantes $(0, 3/2)$.

Examen écrit d'algèbre/géométrie

Premier bachelier en sciences physiques,
jeudi 31 mai 2007

Fin de l'examen **12h30** !

5. Discuter et résoudre le système suivant où α est un paramètre complexe,

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha x + z = 1\\ \alpha y + z = 2\alpha\end{array}\right.$$

solution Sous forme matricielle, le système s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 1\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 2\alpha\end{pmatrix}}_{b}.$$

Il est clair que $\mathrm{rg}(A) \in \{1, 2\}$. Les trois sous-matrices de dimension 2 que l'on trouve dans A sont

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ \alpha & 1\end{pmatrix}$$

de déterminant respectif α^2, α et $-\alpha$. Ainsi le rang de A vaut 2 si et seulement si $\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Premier cas, $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, le système est compatible puisque le rang de $(A|b)$ ne saurait augmenter et vaut aussi 2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions du système est de la forme

$$\left\{\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}, \frac{2\alpha-\lambda}{\alpha}, \lambda\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Second cas, $\alpha = 0$. Ici, $\mathrm{rg}(A) = 1$ et le rang de $(A|b)$ vaut 2 car on peut extraire de $(A|b)$ la sous-matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ayant un déterminant non nul (deuxième et quatrième colonnes de $(A|b)$). Par conséquent, système non compatible, pas de solution.

6. Donner, pour tout entier $n \geq 0$, la forme générale de

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n.$$

Votre réponse sera justifiée par récurrence sur n.

solution. Montrons que
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$
On le vérifie facilement pour $n = 0$ ou 1. Si la propriété est satisfaite pour $n \geq 0$, l'est-elle pour $n+1$?
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$
ce qui suffit.

7. Dans un espace affin de dimension 3 muni d'un repère, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 3)$ et $(-2, -2, 0)$. Donner une équation cartésienne

a) de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B,
b) du plan contenant $\mathcal{D}$ et le point C,
c) de la droite passant par A et parallèle à $\overrightarrow{BC}$.

a)
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$
ou encore
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - z = 3. \end{cases}$$

b) Un plan contenant $\mathcal{D}$ a pour équation
$$\lambda(2x - y - 3) + \mu(3x - z - 3) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$
Si C appartient à ce plan, alors $-5\lambda - 9\mu = 0$. On trouve alors l'équation $9(2x - y - 3) - 5(3x - z - 3) = 0$ ou encore
$$3x - 9y + 5z = 12.$$

c)
$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{3}.$$

8. Dans un espace vectoriel euclidien E, démontrer que pour tous $u, v \in E$,
$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2.$$

solution. On a, par linéarité du produit scalaire,
$$||u+v||^2 = \langle u+v, u+v \rangle = ||u||^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + ||v||^2$$
et
$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v \rangle = ||u||^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + ||v||^2.$$
On conclut en sommant membre à membre.