Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
jeudi 31 mai 2007

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matière du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 11h00.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matière du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice M est-elle normale ? Représenter graphiquement ces valeurs dans le plan complexe.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \overline{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha = 1$, diagonaliser M par une matrice unitaire U. Dans ce cas, donner explicitement U et la matrice diagonale correspondante.

solution. La matrice M est normale si $MM^* = M^*M$. Cette condition donne

$$\begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha^2+\overline{\alpha} & 0 \\ \alpha+\overline{\alpha}^2 & 2|\alpha|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+|\alpha|^2 & \alpha+\overline{\alpha}^2 & 0 \\ \alpha^2+\overline{\alpha} & 2|\alpha|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix}$$

qui est équivalent à

$$\alpha + \overline{\alpha}^2 = \alpha^2 + \overline{\alpha}$$

ou encore à

$$\alpha^2 - \overline{\alpha}^2 + \overline{\alpha} - \alpha = 0$$

et le premier membre se factorise en

$$(\underbrace{\alpha - \overline{\alpha}}_{2i\,\mathfrak{Im}\,\alpha})(\underbrace{\alpha + \overline{\alpha}}_{2\mathfrak{Re}\,\alpha} - 1) = 0.$$

En conclusion, M est une matrice normale si et seulement si $\mathfrak{Re}\,\alpha = 1/2$ ou $\mathfrak{Im}\,\alpha = 0$; la représentation graphique s'en déduit aisément.

Pour $\alpha = 1$, on trouve facilement que M possède trois valeurs propres simples 2, 1 et 0 ayant respectivement comme vecteur propre normé

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice U ayant ces trois vecteurs pour colonnes est telle que $U^*MU = \operatorname{diag}(2,1,0)$.

2. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$
Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} M^n = B.$$
Cette matrice B est-elle nilpotente ? Justifier.
(*Suggestion*: diagonaliser tout d'abord M. *Pour rappel*: une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ de matrices converge vers une matrice B, si pour tous i, j, la suite numérique $([A_n]_{i,j})_{n\geq 0}$ converge vers $B_{i,j}$.)

solution. La matrice M a 1 comme valeur propre simple et $1/2$ comme valeur propre double. On vérifie facilement que la multiplicité géométrique de $1/2$ vaut 2. La matrice M est donc diagonalisable. La matrice
$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est telle que $S^{-1}MS = \operatorname{diag}(1, 1/2, 1/2)$. On remarque que
$$\begin{aligned} M^n &= (S\operatorname{diag}(1,1/2,1/2)\,S^{-1})^n = S\,[\operatorname{diag}(1,1/2,1/2)]^n S^{-1} \\ &= S\operatorname{diag}(1, 1/2^n, 1/2^n)\,S^{-1}. \end{aligned}$$
De là,
$$B = \lim_{n\to\infty} M^n = S\operatorname{diag}(1,0,0)\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
Pour montrer que B est nilpotente, on peut procéder en calculant effectivement B^2 ou en remarquant que
$$B^2 = S\operatorname{diag}(1,0,0)^2\,S^{-1} = S\operatorname{diag}(1,0,0)\,S^{-1} = B.$$

3. Soit M une matrice carrée de $\mathbb{C}^n_n$ ayant
$$\chi_M(\lambda) = (\lambda-3)^4\ (\lambda-5)^2 \text{ et } \mathcal{M}_M(\lambda) = (\lambda-3)^2\ (\lambda-5)$$
respectivement comme polynôme caractéristique et minimum.

a) Cette matrice est-elle diagonalisable ? Justifier.
b) A quelle(s) forme(s) de Jordan M peut-il être réduite. (Donner toutes les formes possibles, à une permutation près des blocs.)
c) Pour chacune des formes de Jordan J obtenues au point précédent, donner la forme générale de J^n, $n \geq 0$.
d) Donner la dimension du sous-espace vectoriel $\{P(M) : P \in \mathbb{C}[z]\}$?

solution.

a) M n'est pas diagonalisable car son poylôme minimum possède 3 comme zéro multiple (rappel : une matrice est diagonalisable si et seulement si son poylôme minimum ne possède que des zéros simples).

b) Pour la valeur propre 3, le tableau correspondant contient 4 cases (vu la multiplicité dans χ_M) et la plus longue chaîne est de longueur 2 (vu la multiplicité dans $\mathcal{M}_M$). Puisque $4 = 2+2$ ou $4 = 2+1+1$, on a deux formes possibles de tableau pour une base répartie en chaîne, si les chaînes sont ordonnées par longueur décroissante

$$\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cc} * & * \\ * & \\ * & \end{array} .$$

Ces tableaux correspondent respectivement aux blocs de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

On procède de même pour la valeur propre 5 et là, une seule forme de tableau possible et le bloc correspondant,

$$\begin{array}{c} * \\ * \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Au final, la forme de Jordan associé à M est $\mathrm{diag}(A, B)$ ou $\mathrm{diag}(A', B)$. (Il est bien sûr possible de permuter les blocs de Jordan obtenus ci-dessus.)

c) On remarque au point précedent que J est formé suivant les cas, de trois blocs diagonaux de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ ou } E = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} .$$

Si $J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, J_3)$, alors $J^n = \mathrm{diag}\,(J_1^n, J_2^n, J_3^n)$. Pour conclure, il vient

$$D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \text{ ou } E^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\,\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

où la dernière égalité se vérifie facilement par récurrence sur n.

d) Puisque $\mathcal{M}_M(M) = M^3 - 11M^2 + 39M - 45I = 0$, cela signifie que I, M, M^2, M^3 sont linéairement dépendants. De plus, I, M, M^2 sont linéairement indépendants car sinon, on pourrait trouver un polynôme de degré < 3 qui serait annulé par M (ce qui contredit le fait que $\mathcal{M}_M$ est le polynôme minimum de M).

Pour tout polynôme P, on peut effectuer la division euclidienne de P par $\mathcal{M}_M$, ainsi, $P = \mathcal{M}_M.Q + R$ avec $\deg R \leq 2$. De là,

$$P(M) = \overbrace{\mathcal{M}_M(M)}^{0}.Q(M) + R(M) = R(M) \text{ et on en tire que}$$
$$\dim\{P(M) : P \in \mathbb{C}[z]\} = 3$$

4. Soient $n > 1$ un entier, $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ et ν une permutation de $\{0, 1, \ldots, n\}$. On définit l'application $T : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ par

$$T(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0)$$
$$= a_{\nu(n)} X^n + a_{\nu(n-1)} X^{n-1} + \cdots + a_{\nu(1)} X + a_{\nu(0)}.$$

a) Expliquer pourquoi T est linéaire ?
b) Quel est le rang de l'application ?
c) Représenter T dans une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ au choix.

solution

a) Il suffit de vérifier que $T(kP) = kT(P)$ et $T(P+Q) = T(P)+T(Q)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ et $k \in \mathbb{R}$. (à développer)
b) Pour rappel $\mathrm{rg}(T) = \dim \mathrm{Im}\, T$. Il est clair que $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
c) Considérons la base $1, X, \ldots, X^n$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$. Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$. On remarque que $T(X^j) = X^{\nu^{-1}(j)}$. Dès lors, si A représente T dans la base considérée, on a que

$$A_{i,j} = 1 \text{ si et seulement si } \nu^{-1}(j) = i$$

et $A_{i,j} = 0$ si $\nu^{-1}(j) \neq i$.

5. Avec les mêmes notations que dans l'exercice précédent, on définit l'application $S : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ par

$$S(a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0) = a_3(X^3 + X^2) + a_1(X + 1).$$

a) S est-il un projecteur ? Justifier.
b) Expliciter $\ker(S)$ et $\mathrm{Im}(S)$ et illuster le théorème de la dimension.

solution

a) On remarque tout d'abord que S est linéaire. Il suffit alors de calculer $S^2(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0) = S(a_3X^3 + a_3X^2 + a_1X + a_1)$ pour remarquer que $S^2(P) = S(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$. On a donc bien un projecteur.

b)

$$\ker(S) = \{P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} | S(P) = 0\} = \{a_2 X^2 + a_0 \mid a_2, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(S) &= \{P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} | \exists Q \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} : S(Q) = P\} \\ &= \{a_3 X^3 + a_3 X^2 + a_1 X + a_1 \mid a_1, a_3 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

En particulier, $\dim \ker(S) = 2 = \dim \mathrm{Im}(S)$ et

$$\dim \mathbb{R}[X]_{\leq 3} = 4 = \dim \ker(S) + \dim \mathrm{Im}(S).$$

Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
jeudi 31 mai 2007

Fin de l'examen **12h30** !

6. Calculer $2^{2007} \mod 5$.

solution Si on travaille modulo 5, on a

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 3,\ 2^4 = 1,\ 2^5 = 2, \ldots$$

vu la périodicité de la suite $(2^n \mod 5)_{n\geq 0}$, périodique avec une longueur de période égale à 4, il suffit de remarquer que le reste de la division par 4 de 2007 est 3. Ainsi,

$$2^{2007} = 2^3 = 3 \mod 5.$$

7. Un anneau $(A, +, ., 0, 1)$ est qualifié d'*intègre* si pour tous $p, q \in A$, $p.q = 0$ entraîne $p = 0$ ou $q = 0$. Un champ est-il toujours intègre ? Justifier.

solution La réponse est oui. Procédons par l'absurde. Supposons disposer de a, b non nuls tels que $a.b = 0$. Puisque A est un champ, a possède un inverse a^{-1}. En multipliant la relation $a.b = 0$ par cet inverse, on trouve, $b = 0$. Une absurdité puisque b était supposé non nul.

8. Soit F l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^3_3$ de trace nulle (pour rappel, si $A \in \mathbb{R}^n_n$, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$).

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel réel
b) Son complémentaire, $\mathbb{R}^3_3 \setminus F$ est-il aussi un sous-espace vectoriel ?
c) Quelle est la dimension de F ? En donner une base.
d) Si $A \in F$, la matrice A^2 est-elle symétrique ?
e) Si $A \in F$, la matrice A^2 appartient-elle aussi à F ?

Justifier vos réponses.

solution

a) La matrice nulle est de trace nulle, la somme de deux matrices nulles est encore de trace nulle, idem pour la multiplication par un réel d'une matrice de trace nulle. (à developper)
b) Non, car la matrice nulle n'appartient pas au complémentaire.

c) Une matrice quelconque de F est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\dim F = 5$ et une base est donnée par les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Puisque $A \in F$, A est symétrique. Calculons $\widetilde{A^2} = \widetilde{A}\widetilde{A} = A.A = A^2$ et donc A^2 est bien symétrique.

e) La réponse est non. Un contre exemple suffit. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartient bien à F mais son carré est tel que $\mathrm{tr}(A^2) = 2$.

9. Discuter et résoudre le système suivant où α est un paramètre complexe,

$$\begin{cases} \alpha x + z = 1 \\ \alpha y + z = 2\alpha \end{cases}$$

solution Sous forme matricielle, le système s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix}}_{b}.$$

Il est clair que $\mathrm{rg}(A) \in \{1, 2\}$. Les trois sous-matrices de dimension 2 que l'on trouve dans A sont

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant respectif α^2, α et $-\alpha$. Ainsi le rang de A vaut 2 si et seulement si $\alpha \neq 0$. Si $\alpha = 0$, $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Premier cas, $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, le système est compatible puisque le rang de $(A|b)$ ne saurait augmenter et vaut aussi 2. Dans ce cas, l'ensemble des solutions du système est de la forme

$$\left\{ \left(\frac{1-\lambda}{\alpha}, \frac{2\alpha-\lambda}{\alpha}, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Second cas, $\alpha = 0$. Ici, $\mathrm{rg}(A) = 1$ et le rang de $(A|b)$ vaut 2 car on peut extraire de $(A|b)$ la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ayant un déterminant non nul (deuxième et quatrième colonnes de $(A|b)$). Par conséquent, système non compatible, pas de solution.