# Examen écrit d'algèbre-géométrie

Premier bachelier en sciences physiques,
mercredi 21 juin 2006

**Consignes** :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Pour les étudiants désirant être réinterrogés sur la matiére du partiel, le questionnaire relatif à cette partie ne sera pas distribué avant 11h00.
- Les étudiants qui ne sont pas réinterrogés sur la matiére du partiel doivent rendre leurs solutions pour midi au plus tard.

Bon travail !

**1.** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels. Démontrer que si $H \in \mathbb{C}_n^n$ est une matrice hermitienne, alors il en est de même pour $P(H)$.

**2.** Soient $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ deux matrices normales. Démontrer que les 3 assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $A + iB$ est une matrice normale,
(2) $AB^* + A^*B$ est une matrice hermitienne,
(3) $AB^* - B^*A$ est une matrice hermitienne.

**3.** Soit la matrice

$$M \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Pour quelles valeurs du paramètre $a \in [0, +\infty[$, la matrice $M$ est-elle diagonalisable ?
(2) Si $M$ est diagonalisable, donner une matrice $S$ qui la diagonalise et la matrice diagonale correspondante.

$\longrightarrow$

**4.** Soient $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.
**a)** Soient $i, j$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et $k = i \wedge j$. Démontrer que pour tout vecteur $u \in E$, on a

$$i \wedge (u \wedge i) + j \wedge (u \wedge j) + k \wedge (u \wedge k) = 2u.$$

**b)** Démontrer que pour tous vecteurs $w, x, y, z$, on a

$$\langle w \wedge x, y \wedge z \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle w, y \rangle & \langle w, z \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \end{pmatrix}.$$

**5.** Dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère, on considère la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A$ de coordonnées $(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur ayant $(-1, -1, 1)$ pour composantes. Déterminer le(s) plan(s) éventuel(s) contenant $\mathcal{D}$ et dont la distance à l'origine vaut 1.

**Examen écrit d'algèbre-géométrie**
**Matière du premier semestre**
Premier bachelier en sciences physiques,
mercredi 21 juin 2006

Fin de l'examen : 12h30.

**6.** Discuter et résoudre ce système en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x + ay + z = a^3 \end{cases}$$

**7.** Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les quatre vecteurs suivants

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $(w, x)$ et $(y, z)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$, puis construire la matrice de changement de base pour passer de la première à la seconde base. Utiliser cette matrice de changement de base pour obtenir la décomposition du vecteur $2w + 3x$ dans la base $(y, z)$.

**8.** Dans un espace affin de dimension 3 muni d'un repère, on considère les droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'équations respectives

$$\mathcal{A} \equiv \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{B} \equiv \begin{cases} 2x + y = -2 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Vérifier que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont gauches et donner l'équation cartésienne ainsi qu'un vecteur directeur de la droite passant par le point de coordonnées $(1, -1, 1)$ et s'appuyant sur les droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Vérifier au préalable qu'une telle droite existe dans la situation envisagée ici.