Une correction des questions 1 à 3 se trouvent dans le corrigé destiné aux etudiants mathématiciens.

Question 4

a)

Il vient, d'après la formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned} i \wedge (u \wedge i) + j \wedge (u \wedge j) + k \wedge (u \wedge k) &= u - i\langle u, i\rangle + u - j\langle u, j\rangle + u - k\langle u, k\rangle \\ &= 2u \end{aligned}$$

puisque $i\langle u, i\rangle + j\langle u, j\rangle + k\langle u, k\rangle$ représente la décomposition de u dans la base i, j, k.

b)

Il vient successivement :

$$\begin{aligned} \langle w \wedge x, y \wedge z\rangle &= [w, x, y \wedge z] \\ &= [y \wedge z, w, x] \\ &= \langle (y \wedge z) \wedge w, x\rangle \\ &= \langle z\langle y, w\rangle - y\langle z, w\rangle, x\rangle \\ &= \langle y, w\rangle\langle z, x\rangle - \langle z, w\rangle\langle y, x\rangle, \end{aligned}$$

ce qui est égal au déterminant annoncé dans l'énoncé.

Question 5

L'équation de la droite $\mathcal{D}$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 = y \\ x + 1 = -z. \end{array} \right.$$

L'équation d'un plan contenant $\mathcal{D}$ est donc de la forme

$$\lambda(x + 1 - y) + \mu(x + z + 1) = 0$$

avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ ou encore

$$(\lambda + \mu)x - \lambda y + \mu z + (\lambda + \mu) = 0.$$

Le vecteur normal à un tel plan a donc comme composantes $(\lambda + \mu, -\lambda, \mu)$ et donc sa distance à l'origine est égale à

$$\frac{|(\lambda + \mu).0 - \lambda.0 + \mu.0 + (\lambda + \mu)|}{((\lambda + \mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette distance est égale à 1 si et seulement si $(\lambda + \mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2 = (\lambda + \mu)^2$, ce qui est impossible. Aucun plan ne répond donc à la question.

Question 6

Le système se réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}}_{b}.$$

On a que $1 \leq \rho(A) \leq 2$. Il vient

$$\begin{aligned} \rho(A) = 2 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad a \neq 1. \end{aligned}$$

Premier cas : $a \neq 1$. $\rho(A) = 2$.
$\rho(A|b) = 2 = \rho(A)$ et le système est compatible et simplement indéterminé. Le système initial est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} y$$

et l'ensemble des solutions est donné par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a+1 \end{pmatrix} a^2 \right\} + \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a-1 \end{pmatrix} \right\langle.$$

Deuxième cas : $a = 1$. $\rho(A) = 1$
$\rho(A|b) = 1 = \rho(A)$ et le système est compatible et doublement indéterminé. Le système initial est équivalent au système à une seule équation

$$x + y + z = 1$$

et l'ensemble des solutions est donné par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\langle.$$

Question 7

Les couples (w, x) et (y, z) sont des parties libres : $\lambda w + \mu x = 0$ implique évidemment $\lambda = \mu = 0$ et $\lambda y + \mu z = 0$ implique évidemment $\lambda = \mu = 0$. Elles constituent donc des bases de $\mathbb{R}^2$.

La matrice dont les colonnes sont constituées des composantes de w et de x dans la base (y, z) est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les composantes de $2w+3x$ dans la base (y,z) sont donc égales à :

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Question 8

Les droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont gauches : elles ne sont pas parallèles puisqu'un vecteur directeur de $\mathcal{A}$ est donné par $(1,1,-1)$ et qu'un vecteur directeur de $\mathcal{B}$ est donné par $(1,-2,1)$.

Elles ne sont pas sécantes puisque le système formé par les quatre équations qui les décrivent est incompatible. De fait, les 2 équations décrivant $\mathcal{A}$ impliquent $x=y=-z$, la première équation de $\mathcal{B}$ implique alors $x=-\frac{2}{3}$ mais alors la deuxième équation de $\mathcal{B}$ n'est pas vérifiée.

Un plan contenant $\mathcal{A}$ et le point $(1,-1,1)$ a une équation du type $\lambda(x+z)+\mu(y+z)=0$ avec $2\lambda=0$. Ce plan a donc pour équation $y+z=0$. Ce plan n'est pas parallèle à $\mathcal{B}$ puisque $(1,-2,1)$ ne vérifie pas l'équation $y+z=0$.

Un plan contenant $\mathcal{B}$ et le point $(1,-1,1)$ a une équation du type $\lambda(2x+y+2)+\mu(y+2z)=0$ avec $3\lambda+\mu=0$. Ce plan a donc pour équation $x-y-3z+1=0$. Ce plan n'est pas parallèle à $\mathcal{A}$ puisque $(1,1,-1)$ ne vérifie pas l'équation $x-y-3z=0$.

La droite recherchée existe donc bien et son équation est :

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x-y-3z+1=0. \end{cases}$$