Examen écrit d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mercredi 21 juin 2006

Correction

1. *Soit P un polynôme à coefficients réels. Démontrer que si $H \in \mathbb{C}_n^n$ est une matrice hermitienne, alors il en est de même pour $P(H)$.*

On écrit P sous la forme

$$P = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0,$$

avec des coefficients a_i réels. Ainsi,

$$P(H) = a_k H^k + \cdots + a_1 H + a_0 I$$

et

$$\begin{aligned}
(P(H))^* &= (a_k H^k)^* + \cdots + (a_1 H)^* + (a_0 I)^* \quad (\text{ linéarité de } ^*) \\
&= a_k (H^k)^* + \cdots + a_1 H^* + a_0 I \quad (\text{ les } a_i \text{ sont réels }) \\
&= a_k (H^*)^k + \cdots + a_1 H^* + a_0 I \quad ((H^j)^* = (H^*)^j, \forall j \geq 0) \\
&= a_k H^k + \cdots + a_1 H + a_0 I \quad (H^* = H \text{ par hypothèse }) \\
&= P(H).
\end{aligned}$$

2. *Soient $A, B \in \mathbb{C}_n^n$ deux matrices normales. Démontrer que les 3 assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$A + iB$ est une matrice normale,*
2. *$AB^* + A^*B$ est une matrice hermitienne,*
3. *$AB^* - B^*A$ est une matrice hermitienne.*

On a

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad (A + iB)^*(A + iB) = (A + iB)(A + iB)^* \\
&\Leftrightarrow \quad (A^* - iB^*)(A + iB) = (A + iB)(A^* - iB^*) \\
&\Leftrightarrow \quad A^*A + iA^*B - iB^*A + B^*B = AA^* - iAB^* + iBA^* + BB^* \\
&\Leftrightarrow \quad iA^*B - iB^*A = -iAB^* + iBA^* \quad (\text{ A et B sont normales par hypothèse }) \\
&\Leftrightarrow \quad A^*B + AB^* = BA^* + B^*A.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad (AB^* + A^*B)^* = AB^* + A^*B \\
&\Leftrightarrow \quad BA^* + B^*A = AB^* + A^*B \\
&\Leftrightarrow \quad (1)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(3) \quad &\Leftrightarrow \quad (AB^* - B^*A)^* = AB^* - B^*A \\
&\Leftrightarrow \quad BA^* - A^*B = AB^* - B^*A \\
&\Leftrightarrow \quad BA^* + B^*A = AB^* + A^*B \\
&\Leftrightarrow \quad (1)
\end{aligned}$$

3. *Soit α un nombre complexe non nul et l'application $T : \mathbb{C}[z]_2 \to \mathbb{C}_2^2$ qui à un polynôme de degré au plus deux de la forme $a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c$ associe la matrice*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

(1) *Vérifier que T est linéaire.*

Si λ et μ sont deux complexes, si $p(z) = a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c$ et $q(z) = a'(z-\alpha)^2 + b'(z-\alpha) + c'$ sont deux polynômes de $\mathbb{C}[z]_2$, il vient successivement, par définition de T,

$$\begin{aligned}
T(\lambda p(z) + \mu q(z)) &= T(\lambda(a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c) + \mu(a'(z-\alpha)^2 + b'(z-\alpha) + c')) \\
&= T((\lambda a + \mu a')(z^2 - \alpha) + (\lambda b + \mu b')(z-\alpha) + (\lambda c + \mu c')) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda b + \mu b' & \lambda c + \mu c' \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \\
&= \lambda T(p(z)) + \mu T(q(z)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de T.

(2) *Représenter T matriciellement dans des bases de $\mathbb{C}[z]_2$ et $\mathbb{C}_2^2$ de votre choix (ces deux espaces étant considérés comme des $\mathbb{C}$-vectoriels)*

Étant donné la définition de T et puisque le choix des bases pour obtenir cette représentation matricielle est laissé à notre appréciation, il semble judicieux de choisir de représenter T dans les bases $((z-\alpha)^2, (z-\alpha), 1)$ de $\mathbb{C}[z]_2$ (il est trivial de vérifier que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants) et $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ de $\mathbb{C}_2^2$.
Comme $T((z-\alpha)^2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $T((z-\alpha)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $T(1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, la représentation matricielle de T dans les bases choisies est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) *Donner une base de* $\operatorname{Im} T$ *tout d'abord si* $\mathbb{C}_2^2$ *est considéré comme un* $\mathbb{C}$*-vectoriel puis ensuite, s'il est considéré comme un* $\mathbb{R}$*-vectoriel.*

Il est clair que

$$\operatorname{Im} T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

Ainsi, si $\operatorname{Im} T$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-vectoriel, il apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme ces dernières sont linéairement indépendantes, elles forment une base de $\operatorname{Im} T$.
Si maintenant $\operatorname{Im} T$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel, il apparaît comme l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients *réels*) des matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$. Comme ces dernières sont linéairement indépendantes (lorsqu'on les considère comme vecteurs de $\mathbb{C}_2^2$ vu comme espace vectoriel *réel*), elles forment une base de $\operatorname{Im} T$.

(4) *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel*

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}_2^2)$$

des applications linéaires définies sur $\mathbb{C}[z]_2$ *et à valeurs dans* $\mathbb{C}_2^2$ *(tous les espaces envisagés sont considérés comme étant des* $\mathbb{C}$*-vectoriels) ? En donner une base et décomposer* T *dans celle-ci.*

Comme $\mathbb{C}[z]_2$ et $\mathbb{C}_2^2$ sont des $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension 3 et 4 respectivement, il vient

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{L}(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}_2^2)) &= \dim(\mathbb{C}[z]_2).\dim(\mathbb{C}_2^2) \\ &= 3.4 = 12 \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que si $T_{i,j}$ (où $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 4$) désigne l'unique élément de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}_2^2)$ qui envoie le i^e vecteur de la base $((z-\alpha)^2, (z-\alpha), 1)$ de $\mathbb{C}[z]_2$ sur le j^e vecteur de la base $(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$ de $\mathbb{C}_2^2$ et qui envoie les autres vecteurs de $((z-\alpha)^2, (z-\alpha), 1)$ sur 0, alors $(T_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}_2^2)$. Ainsi, les opérateurs

$$\begin{array}{l|l}
T_{11} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & T_{12} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\
T_{13} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{smallmatrix}\right) & T_{14} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \\
T_{21} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & T_{22} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\
T_{23} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) & T_{24} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \\
T_{31} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & T_{32} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\
T_{33} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) & T_{34} : a(z-\alpha)^2 + b(z-\alpha) + c \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)
\end{array}$$

forment une base de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[z]_2, \mathbb{C}_2^2)$.
On vérifie directement que dans cette base, l'opérateur T se décompose en $T = T_{11} + T_{22} + T_{23} + T_{34}$.

4. *Soit la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) *Pour quelles valeurs du paramètre $a \in [0, +\infty[$, la matrice M est-elle diagonalisable ?*

Recherche des valeurs propres. Ce sont les racines du polynôme caractéristique

$$\det(M - \lambda I) = (3 - \lambda)((\lambda^2 - 2\lambda + a^2 + 1),$$

c'est-à-dire 3, $1 - ai$, $1 + ai$. On a $1 - ai = 1 + ai$ si et seulement si $a = 0$.
Premier cas : $a = 0$. Les valeurs propres sont 3 (de multiplicité algébrique 1) et 1 (de multiplicité algébrique 2).
Evaluons la multiplicité géométrique de la valeur propre 1. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est $\ker(M - I)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $(x, y, z)^\sim$ solutions du système

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ x = y \end{cases}$$

et

$$\ker(M - I) = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\langle.$$

D'où $\dim(\ker(M - I)) = 1 \neq 2$ et M n'est pas diagonalisable.
Deuxième cas : $a \neq 0$. Les valeurs propres sont 3, $1 - ai$, $1 + ai$, toutes de multiplicité algébrique 1 et M est diagonalisable.
Conclusion : M est diagonalisable pour tout $a \in]0, +\infty[$.

(2) *Si M est diagonalisable, donner une matrice S qui la diagonalise et la matrice diagonale correspondante.*

Supposons que $a \neq 0$.
Recherche d'un vecteur propre associé à la valeur propre 3. L'espace propre associé à la valeur propre 3 est $\ker(M - 3I)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $(x, y, z)^\sim$ solutions du système

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

et

$$\ker(M - 3I) = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\langle.$$

Recherche d'un vecteur propre associé à la valeur propre $1 - ai$. L'espace propre associé à la valeur propre $1 - ai$ est $\ker(M - (1 - ai)I)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $(x, y, z)^{\sim}$ solutions du système

$$\begin{pmatrix} 2+ai & 0 & 1 \\ 2 & ai & 1-a^2 \\ -1 & 1 & ai \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -(2+ai)x \\ y = x - aiz = (1 + 2ai - a^2)x \end{array} \right.$$

et

$$\ker(M - 3I) = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - a^2 + 2ai \\ -2 - ai \end{pmatrix} \right\langle .$$

Recherche d'un vecteur propre associé à la valeur propre $1 + ai$. L'espace propre associé à la valeur propre $1 + ai$ est $\ker(M - (1 + ai)I)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $(x, y, z)^{\sim}$ solutions du système

$$\begin{pmatrix} 2-ai & 0 & 1 \\ 2 & -ai & 1-a^2 \\ -1 & 1 & -ai \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = (-2+ai)x \\ y = x + aiz = (1 - 2ai - a^2)x \end{array} \right.$$

et

$$\ker(M - 3I) = \left\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - a^2 - 2ai \\ -2 + ai \end{pmatrix} \right\langle .$$

La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - a^2 + 2ai & 1 - a^2 - 2ai \\ 0 & -2 - ai & -2 + ai \end{pmatrix}$$

diagonalise M et $S^{-1}MS = \mathrm{diag}(3,\, 1 - ai,\, 1 + ai)$.

5. *Réduire la matrice suivante à la forme canonique de Jordan*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On veillera à donner explicitement une matrice permettant d'effectuer cette réduction et à en donner la forme de Jordan correspondante.

On trouve directement que $\det(M - \lambda I) = (2 - \lambda)^4$. Ainsi, l'unique valeur propre de M est 2 de multiplicité 4. Comme

$$M - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2, l'espace propre de M associé à la valeur propre 2 est de dimension 4-2=2. Ainsi, la première colonne du tableau associé à une base répartie en chaînes contient deux cases. Ensuite, comme $(M-2I)^2=0$, le noyau de $(M-2I)^2$ est égal à $\mathbb{C}_4^4$ et il s'agit du sous-espace caractéristique associé à la valeur propre 2. La deuxième colonne du tableau contient donc également deux cases.

Pour construire une matrice de passage à la forme canonique de Jordan de M, nous partons donc à la recherche de deux chaînes de longueur 2 associées à la valeur propre 2 et qui sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire dont les queues sont linéairement indépendantes). Ainsi, nous cherchons deux vecteurs u et v de $\mathbb{C}_4^4$ qui n'appartiennent pas à $\ker(M-2I)=\rangle e_1+e_2, e_4\langle$ et tels que $(M-2I)u$ et $(M-2I)v$ sont linéairement indépendants. Si $u=e_1$ et $v=e_3$, on obtient $(M-2I)u=(-1,-1,0,-1)^\sim$ et $(M-2I)v=(0,0,0,1)^\sim$ qui sont deux vecteurs non multiples l'un de l'autre. Ainsi, ce choix de u et v convient.

Alors, la matrice

$$S=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

est une matrice inversible telle que

$$S^{-1}MS=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

6. *Soient $M\in\mathbb{Z}_2^2$ une matrice 2×2 à coefficients entiers et la relation $\sim_M$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par*

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\sim_M\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\exists\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

(1) • Démontrer que $\sim_M$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

a) réflexivité ? On prend $\alpha_1=\alpha_2=0$.

b) symétrie ? Supposons que

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\sim_M\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

c'est-à-dire qu'il existe α_1, $\alpha_2\in\mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}-\alpha_1\\-\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

et on a bien aussi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

c) transitivité ? Supposons que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_1,\ \alpha_2, \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a bien aussi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

(2) • Pour la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

lesquels des trois vecteurs suivants sont équivalents pour $\sim_M$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Testons l'équivalence de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Peut-on écrire le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sous la forme $M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, avec $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{Z}$? Autrement dit, le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

possède-t-il une solution dans $\mathbb{Z}^2$? La deuxième équation de ce système s'écrit

$$4 = 3\alpha_2.$$

Celle-ci n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$. On obtient donc que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont pas équivalents.

Testons maintenant l'équivalence de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$. De la même manière, on recherche les solutions de $\mathbb{Z}^2$ du système

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Celui-ci possède la solution $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ et on en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont équivalents.

(3) • Pour la matrice M du point précédent, donner explicitement l'ensemble des vecteurs $\binom{z_1}{z_2}$ équivalents à $\binom{2}{4}$ (des équations paramétriques suffisent).

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2 \\ z_2 = 3\alpha_2 + 4, \end{cases}$$

pour α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$.

(4) • Pour la matrice M du point (2), démontrer que le nombre de classes d'équivalence pour $\sim_M$ est exactement 3 et donner un représentant de chaque classe.

Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^2$, les éléments équivalents à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ x_2 + 3\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Si $x_2 \equiv 0$ (resp. 1, 2) $\pmod 3$, alors il en est de même pour la deuxième composante des éléments équivalents à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et réciproquement. La première composante peut prendre n'importe quelle valeur. Il y a donc exactement 3 classes d'équivalence données par exemple par les représentants

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(5) • Pour une matrice $M \in \mathbb{Z}_2^2$ quelconque, est-il vrai que :
si $\binom{x_1}{x_2} \sim_{M^2} \binom{y_1}{y_2}$, alors $\binom{x_1}{x_2} \sim_M \binom{y_1}{y_2}$?
La réciproque est-elle satisfaite ? (Justifier)

La propriété est vraie. En effet, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= M^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= M \underbrace{M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{Z}^2} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La réciproque est fausse. Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ et on a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim_M \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ vu le point précédent, mais par contre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \not\sim_{M^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. En effet, le système

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

7.a *Pour l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3_3$ des matrices carrées 3×3 muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est-il vrai que l'ensemble A des matrices de carré nul, i.e.,*

$$A = \{M \in \mathbb{R}^3_3 \mid M^2 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E ? Justifiez votre réponse.

Non. Par exemple les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont de carré nul, mais $(A + B)^2 \neq 0$.

7.b *Soit F l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel.*

(1) *L'ensemble des fonctions strictement croissantes et continues est-il un sous-espace vectoriel de F ?*

Non. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est un élément de F mais $-f$ est une fonction strictement décroissante et n'appartient donc pas à F.

(2) *L'ensemble des fonctions constantes est-il un sous-espace vectoriel de E ?*

Oui. Tout d'abord, toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction nulle est une fonction constante et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c'$ (où c et c' sont deux constantes réelles) sont deux fonctions constantes et si λ, μ sont deux réels, alors $\lambda f + \mu g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda c + \mu c'$ est également une fonction constante.