**Examen d'algèbre** mercredi 24 janvier 2024
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

**Consignes** : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Remettez la première page de ce questionnaire. Bon travail.

| NOM : |
|---|
| PRENOM : |
| MATRICULE : s |

**1)** [6 points] Enoncer et démontrer le théorème de la dimension exprimant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Si vous ne savez pas répondre à la question ci-dessus, vous pouvez à la place (mais avec pénalité !), énoncer et démontrer les lois des mineurs (aussi sous forme matricielle et expliquer cette forme) ainsi que le lemme exprimant un cofacteur.

**2)** [4 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) On donne $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}^8$ tels que $x_1, x_2$ sont linéairement dépendants et $x_3, x_4, x_5$ aussi. On ne peut jamais trouver 3 vecteurs linéairement indépendants parmi $x_1, \ldots, x_5$.

b) Le *commutateur* de deux matrices carrées $A$ et $B$ (de même dimension) est défini par $[A, B] = AB - BA$. Si $[A, B] = [B, A]$, alors une des deux matrices $A, B$ est un multiple (par un scalaire) de la matrice identité.

c) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le système

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

a une unique solution sauf si $a = b = c = 1$.

d) Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} z & 0 & -1 \\ 0 & z & -1 \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$$

vaut 0 si $z \in \{0, -\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\}$.

**3)** [2 points] Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres $a, c \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & c \end{pmatrix}$$

**4)** [6 points] On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $E$ muni d'une base $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

a) Prouver que $V = (u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 - u_1)$ est encore une base de $E$.

b) Si un vecteur $x \in E$ a pour composantes $(1, 0, -1, 2)$ dans la base $V$, quelles sont ses composantes dans la base $U$ ?

c) On considère le sous-espace vectoriel $F = \rangle u_1 + u_2, 2u_2 + u_3, u_1 - u_2 - u_3 \langle$, montrer que la dimension de $F$ vaut 2.

d) Soit $G = \rangle u_1 + u_4, 2u_1 - u_3 \langle$. Donner une base de $F \cap G$.

e) Que vaut la dimension de $F + G$ ?

f) Donner une base d'un supplémentaire de $G$ dans $E$.

**5)** [2 points] Décrire l'ensemble des solutions de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$