Examen de théorie des graphes 20 janvier 2023
bacheliers en sc. mathématiques et informatiques

Consignes : Répondre à la théorie et aux exercices sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Lorsqu'une question contient plusieurs points, pour répondre à une partie, on admettra les points précédents. Fin de l'examen **11h30**. Bon travail.

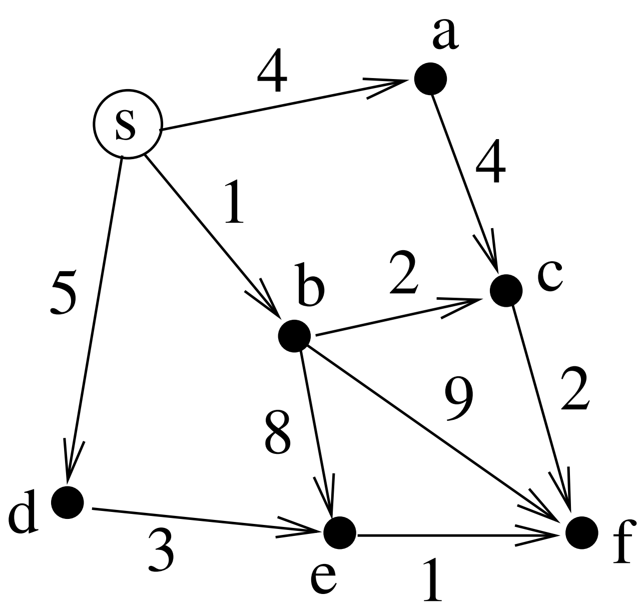
- Pour les étudiants **ne présentant pas le projet**

1. Enoncer le théorème de Perron pour une matrice primitive A ainsi que son corollaire donnant le comportement asymptotique de A^n.
2. Au choix :
   - Démontrer que 5 couleurs suffisent pour obtenir un coloriage propre des faces d'un graphe planaire.
   - Enoncer et démontrer le théorème d'Ore et ses corollaires.
3. Donner un exemple de graphe simple orienté à 5 sommets ayant une matrice d'adjacence irréductible mais pas primitive. Illustrer à l'aide de cet exemple la notion de période.

- Pour les étudiants **ayant présenté le projet**

1. Donner un exemple de ... (justifier à chaque fois votre construction)
   a) graphe (non orienté) simple hamiltonien mais non eulérien à 8 sommets.
   b) graphe simple orienté à 6 sommets, simplement connexe, qui possède un chemin eulérien mais pas de circuit eulérien.
   c) multi-graphe orienté à 5 sommets dont la matrice d'adjacence est primitive.
   d) graphe simple orienté à 6 sommets et 9 arcs possédant au moins deux tris topologiques.
   e) graphe simple non planaire à 7 sommets.

2. Appliquer l'algorithme de Dijkstra, en détaillant les étapes, au graphe orienté et pondéré suivant, source s. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq s$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v)



- Pour **TOUS** (exercices 20 points)

1. (5 points) Le jeu du policier (P) et du voleur (V) se joue sur un graphe simple connexe non orienté. Au départ, P se place sur un sommet de son choix puis V fait de même. P et V connaissent toujours la position de l'adversaire. Ils jouent à tour de rôle et P débute. A son tour, le joueur (P ou V) décide de ne pas bouger ou de se déplacer sur un sommet voisin de celui qu'il occupe.

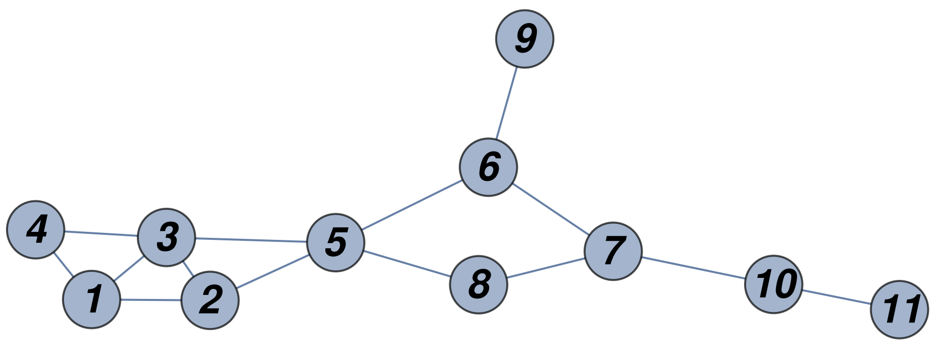
   – P gagne la partie si, à son tour, il se déplace sur le sommet occupé par V.

   – V gagne la partie s'il peut se déplacer indéfiniment sans jamais être attrapé par P.

   a) Montrer qu'avec un cycle de longueur ≥ 4, V dispose d'une stratégie lui permettant de gagner. Décrivez cette stratégie (comment V doit-il jouer ?).

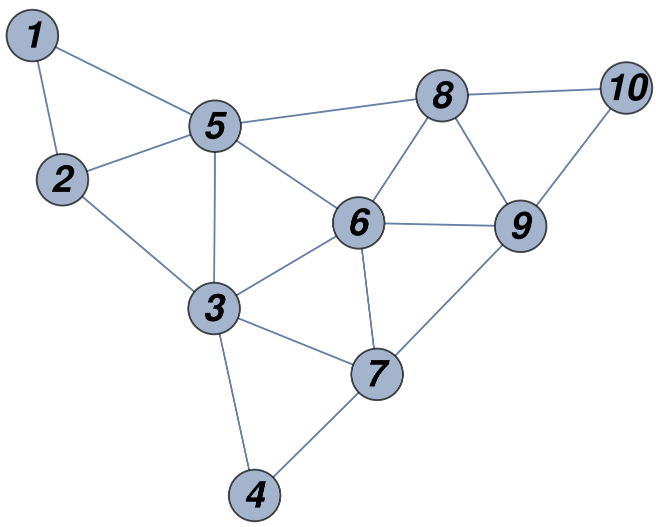
b) Dans un graphe complet K_n, qui est en mesure de gagner la partie (en fonction de n) ? Pourquoi ?

c) Pour un sommet u, on note $N(u)$ l'ensemble formé par u et ses voisins. Un sommet v est une *embûche*, s'il existe un autre sommet t tel que $N(v) \subseteq N(t)$. Le sommet t est alors appelé *attaque* de v. Dans le graphe ci-dessous, quels sont les sommets embûches et leur(s) attaque(s) respectives ? Pour chaque sommet u du graphe, on précisera l'ensemble $N(u)$.



d) Pourquoi un arbre possède-t-il toujours une embûche ?

e) On *admet* qu'on ne change pas l'issue d'une partie si on supprime d'un graphe les embûches (et les arêtes adjacentes). Utilisez ce résultat pour déterminer qui de P ou V est en mesure gagner avec le graphe suivant. (Suggestion: un graphe formé d'un unique sommet est toujours gagnant pour P).

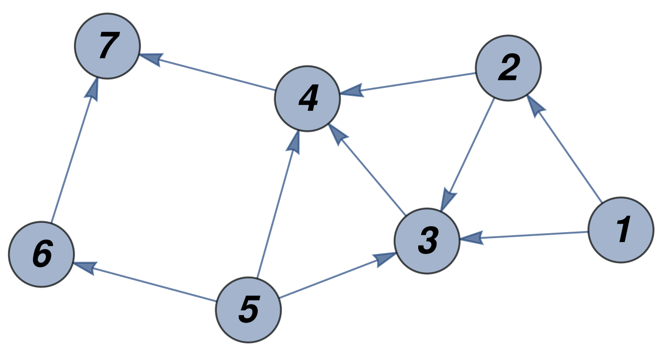


2. (5 points) On considère un graphe planaire connexe G dont toutes les faces sont triangulaires, carrées, ou pentagonales (3, 4, 5 côtés). De chaque sommet partent exactement une face triangulaire, une face pentagonale et deux faces carrées. On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et t, c, p le nombre de faces des différents types.

   a) Exprimer la formule d'Euler liant s, a, t, c, p.
   b) Quelle relation liant s et t déduisez-vous des données ?
   c) Quelle relation liant s et c pouvez-vous tirer ?
   d) Quelle relation liant s et p pouvez-vous tirer ?
   e) Quelle relation liant a et t, c, p pouvez-vous tirer ?

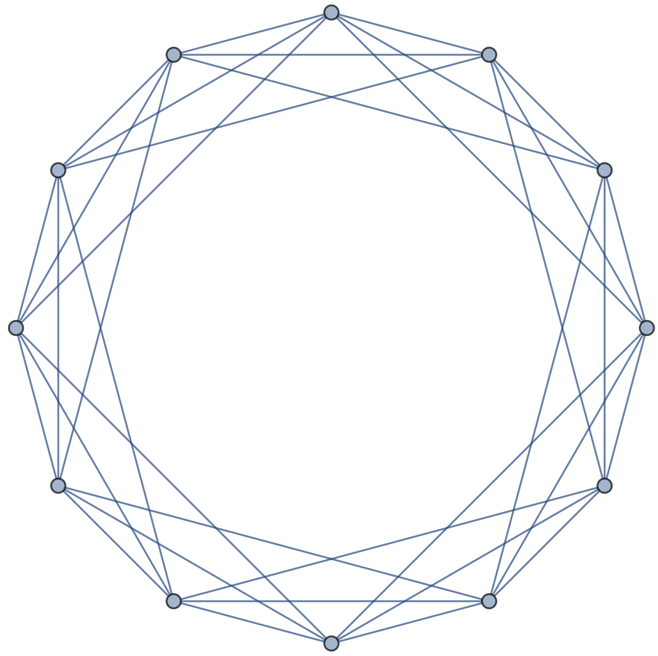
   Enfin, déterminer les valeurs de s, a, t, c, p. (Suggestion : pour **vérifier** vos calculs, vous devez trouver un nombre total de faces de 62 — vous ne pouvez pas utiliser cette information telle quelle dans votre résolution.).

3. (5 points) Soit le graphe G ci-dessous



   – Fournir tous les tris topologiques de G.
   – Ajouter un nombre minimum d'arcs de telle sorte que G ne possède plus de tri topologique.
   – Ajouter 7 arcs tout en conservant un graphe simple possédant au moins un tri topologique (donner un tel tri).

4. (5 points) Soit le graphe $G = (V, E)$



- Est-il eulérien ? Justifier.
- Est-il planaire ? Justifier.
- Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour obtenir un coloriage propre des sommets du graphe ? Justifier et donner un tel coloriage.
- La matrice d'adjacence de ce graphe est-elle irréductible et/ou primitive ? Justifier.
- Que vaut le rayon du graphe ? Pour rappel, cette quantité est donnée par

$$\max_{u,v \in V} d(u, v).$$