Examen d'algèbre vendredi 27 janvier 2023
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Remettez la première page de ce questionnaire. Bon travail.

NOM :
PRENOM :
MATRICULE : s

1) [2 points] Pour les quatre permutations suivantes, déterminer leur signature en explicitant et justifiant votre raisonnement

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\nu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

et ν_4 est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ définie par

$$\nu_4 : i \mapsto \begin{cases} i & , \text{ si } i \not\in \{k, n-k\} \\ n-i & , \text{ sinon} \end{cases}$$

avec n, k fixés tels $n \geq 4$ et $1 \leq k \leq n/2$.

2) [4 points] Enoncer et <u>démontrer</u> le *théorème de Steinitz* traitant de la dépendance linéaire.

Si vous ne savez pas répondre à la question ci-dessus, vous pouvez à la place (mais avec pénalité !), énoncer et <u>démontrer</u> le *théorème de Rouché* (précisez les dimensions des matrices qui interviennent).

3) [4 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Soit A une matrice 4×5 possédant une sous-matrice 2×2 ayant un déterminant non nul. Pour déterminer si le rang de A vaut 2, il suffit de calculer le déterminant de 6 matrices 3×3 bien choisies.

b) Dans l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f(x) = \sin x + \cos x$, $g(x) = 2\sin x - \sqrt{2}\cos x$ et $h(x) = \pi \sin x + 2\cos x$ sont linéairement indépendantes.

c) Soit $A \in \mathbb{C}_5^5$. Si les 3 premières colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors le rang de A est ≤ 3.

d) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a
$$\det \begin{pmatrix} I & A \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix} = 0.$$

4) [3 points] Soit le système suivant où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre
$$\begin{cases} x + 3y - z &= 1 \\ x + y &= \lambda \\ 2x + 4y + \lambda z &= 0 \end{cases}$$

a) Etudier la compatibilité du système en fonction de la valeur de λ.

b) Pour quelles valeurs de λ le système est-il de Cramer ? Dans ce cas, donner son unique solution (celle-ci peut faire intervenir λ).

c) Donner explicitement l'ensemble des solutions quand le système n'est pas de Cramer.

5) [5 points] On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$.

a) Soit F l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\sim \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 - x_3 = 0.$$

Justifier que F est un sous-espace vectoriel. Quelle en est la dimension ? (Les justifications théoriques à fournir peuvent être relativement courtes.)

b) Soit le sous-vectoriel

$$G = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle.$$

Donner une base de G.

c) Donner une base de $F \cap G$. En déduire la dimension de $F + G$.

d) Donner un vecteur n'appartenant **pas** à $F + G$. Pouvez-vous trouver 2 tels vecteurs linéairement indépendants n'appartenant pas à $F + G$? Justifier.

e) L'ensemble H formé des $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\sim \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_1^2 - x_2^2 = 0$ est-il un sous-espace vectoriel ? Argumenter votre réponse.

6) [2 points] Vérifier que les trois vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les composantes, dans cette base, de

$$\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ -2 \end{pmatrix}.$$