Examen de théorie des graphes 21 janvier 2022
bacheliers en sc. mathématiques et informatiques

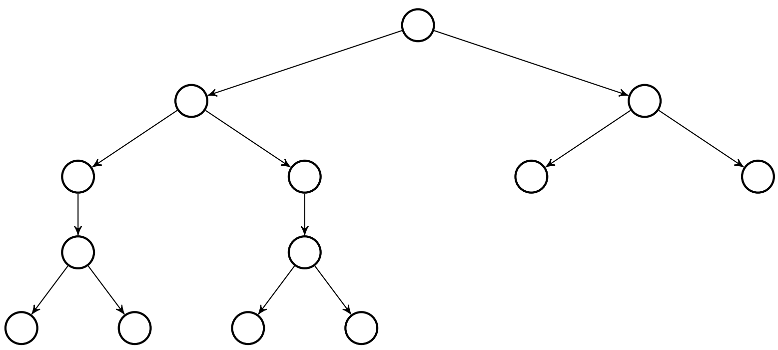
Consignes : Répondre à la théorie et aux exercices sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Lorsqu'une question contient plusieurs points, pour répondre à une partie, on admettra les points précédents. Fin de l'examen **17h30**. Bon travail.

- Pour les étudiants **ne présentant pas le projet**

1. Définir les notions de parcours préfixe et suffixe d'un arbre. Donner un exemple montrant que ces deux parcours sont différents.
2. Enoncer et démontrer le résultat caractérisant un graphe biparti par son spectre (condition nécessaire et suffisante).
3. Donner un exemple de graphe planaire montrant qu'il faut au moins 4 couleurs pour avoir un coloriage propre de ses faces.

- Pour les étudiants **ayant présenté le projet**

1. Recopier l'arbre sur votre feuille (à trois reprises)

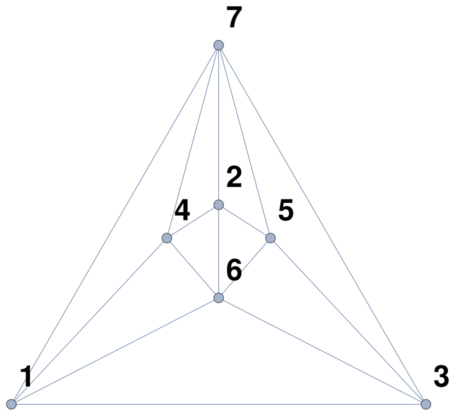


   y placer les labels des sommets de telle sorte que l'énumération $1, 2, 3, \ldots, 10, 11$ soit préfixe, infixe puis suffixe. Si un sommet possède un seul fils, on suppose qu'il s'agit du fils de gauche.

2. Détailler les grandes étapes d'un algorithme (en français ou pseudo-code) permettant de tester si un multi-graphe non orienté est ou non eulérien.

- Pour **TOUS** (exercices 20 points)

1. (6 points) On considère le graphe G non orienté représenté ci-dessous.



   a) Ce graphe est-il eulérien ? Est-il hamiltonien ? Justifier. En cas de réponse positive, fournir un circuit convenable.

   b) Donner un coloriage propre des sommets du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs.

   c) Ce graphe est-il biparti ? Justifier.

   d) Donner la matrice d'adjacence du graphe (pour la numérotation des sommets proposée).

   e) Cette matrice est-elle primitive ? On peut justifier sans en calculer des puissances.

   f) Combien y-a-t-il de circuits de longueur 3 démarrant et aboutissant dans le sommet 1 ? Même question avec le sommet 6.

2. (5 points) On considère un graphe planaire connexe G dont toutes les faces sont carrées, hexagonales ou décagonales ($4, 6, 10$ côtés). De chaque sommet partent une face de chacun des trois types. On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et c, h, d le nombre de faces des différents types.

   a) Exprimer la formule d'Euler liant s, a, c, h, d.

   b) Quelle relation liant s et c déduisez-vous des données ?

   c) Quelle relation liant s et h pouvez-vous tirer ?

d) Quelle relation liant s et d pouvez-vous tirer ?

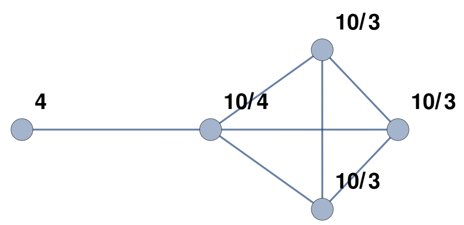
e) Quelle relation liant a et c, h, d pouvez-vous tirer ?

Enfin, déterminer les valeurs de s, a, c, h, d. (Suggestion : pour **vérifier** vos calculs, vous devez trouver un nombre total de faces de 62 — vous ne pouvez pas utiliser cette information telle quelle dans votre résolution.).

3. (5 points) Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Pour tout sommet v, on définit la fonction $f : V \to \mathbb{Q}$ comme la moyenne arithmétique des degrés des voisins de v, c'est-à-dire

$$f(v) = \frac{1}{\#\nu(v)} \sum_{x \in \nu(v)} \deg(x).$$

Pour rappel, $\nu(v)$ désigne l'ensemble des voisins de v. Si v est un sommet isolé, alors $f(v) = 0$. Un exemple est donné ci-dessous :



a) Si A est la matrice d'adjacence de G et si e désigne un vecteur colonne ne contenant que des 1, exprimer $f(v)$ à l'aide des composantes de $A\,e$ et $A^2\,e$.

b) Si G est le graphe complet K_n. Montrer que $f(v)$ est constant et déterminer cette constante.

c) Faire de même si G est un graphe k-régulier ($k \geq 2$). En quoi votre réponse est-elle cohérente avec le point précédent ?

d) Si G est le graphe biparti complet $K_{m,n}$, $m \geq n \geq 1$, quelle(s) valeur(s) peut prendre $f(v)$?

e) Soit r le degré maximal des sommets de G. Montrer que $f(v) \leq r$ pour tout sommet v. Donner une condition suffisante pour que la valeur maximale r puisse être atteinte ? Donner un exemple où elle est atteinte et un où elle ne l'est pas.

4. (4 points) Soit G un graphe simple orienté sans cycle possédant un *chemin* hamiltonien.

   a) Donner un exemple d'un tel graphe avec 6 sommets et 9 arcs.

   b) Justifier que ce chemin hamiltonien permet de définir un tri topologique des sommets

   c) Montrer que G possède un unique sommet u de demi-degré entrant nul.

   d) Montrer que $G - u$ possède encore un chemin hamiltonien.

   e) Déduire des deux points précédents que G possède un unique tri topologique.