Examen d'algèbre mercredi 26 janvier 2022
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) [2 points] Expliquer pourquoi ajouter à une ligne d'une matrice $A \in \mathbb{C}^n_n$, une combinaison linéaire des autres lignes ne change pas la valeur du déterminant. Qu'en est-il pour le rang de la matrice ainsi obtenue ? Justifier vos réponses.

Solution : Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de la matrice A. Fixons un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soient des scalaires α_j, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. On considère la matrice dont la $i$ème ligne de A est remplacée par $L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$. On va utiliser le caractère multilinéaire et alterné du déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \sum_{j \neq i} \alpha_j \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

on a ici mis en évidence, à chaque fois, la $i$ème ligne. Puisque $j \neq i$, dans le déterminant de droite, deux lignes identiques apparaissent et ce déterminant est donc nul (le déterminant est alterné).

Remarques : on pouvait aussi raisonner sur les colonnes de la matrice (ce que beaucoup ont fait) mais en n'oubliant pas de préciser que $\det \widetilde{A} = \det A$. Il était aussi important de bien mettre en évidence que l'indice de sommation ne peut pas prendre la valeur i.

Pour la deuxième partie de la question, si r est le rang de A : on peut trouver r lignes $L_{j_1}, \ldots, L_{j_r}$ linéairement indépendantes telles que toute ligne de A soit combinaison linéaire de celles-ci. Soit A' la matrice dont on a remplacé la ligne i notée ici L'_i. Si $i \not\in \{j_1, \ldots, j_r\}$, alors $L_{j_1}, \ldots, L_{j_r}$ sont toujours des lignes de A' et L'_i est combinaison de celles-ci (car L'_i est une combinaison de lignes de A). Le rang de A' vaut donc r. Si $i \in \{j_1, \ldots, j_r\}$, supposons $i = j_1$ (pour simplifier les notations), alors $L_{j_2}, \ldots, L_{j_r}$ sont encore linéairement indépendants. Le rang de A' vaut au moins $r-1$. Il ne peut pas être égal à $r-1$ car sinon, toute ligne de A' et, en particulier, L'_i serait combinaison de $L_{j_2}, \ldots, L_{j_r}$. Ce serait aussi le cas de $L_{j_1} = L_i = L'_i - \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$. Ceci est absurde car $L_{j_1}, \ldots, L_{j_r}$ sont linéairement indépendants.

Pour être complet, le rang de A' ne peut pas non plus être $> r$. Si on trouvait $r+1$ lignes de A' linéairement indépendantes, alors c'est nécessairement L'_i et r autres lignes de A (car dans A, on ne peut pas avoir plus de r lignes linéairement indépendantes). On est ramené au premier cas discuté plus haut.

Une solution *alternative* élégante est de remarquer que la matrice modifiée A' s'obtient comme

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\
 & & \ddots & & & & \\
\alpha_1 & \cdots & \alpha_{i-1} & 1 & \alpha_{i+1} & \cdots & \alpha_n \\
 & & & & \ddots & & \\
0 & \cdots & & & \cdots 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} A.$$

La première matrice est la matrice identité sauf sur la ligne i. Son déterminant vaut 1 (par exemple, on applique la loi des mineurs). Elle est donc inversible. On sait que si B est inversible, alors $\mathrm{rg}(BA)=\mathrm{rg}(A)$.

2) [4 points] Enoncer et <u>démontrer</u> la *formule de la dimension* permettant d'exprimer la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Si vous ne savez pas répondre à la question ci-dessus, vous pouvez à la place (mais avec pénalité !), énoncer et <u>démontrer</u> le *théorème de Steinitz*.

3) [3 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix}
\lambda & 1 & 2 & \lambda-3 \\
1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1-\lambda & \lambda-3 \\
0 & 2 & 2-\lambda & \lambda-4
\end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que la dernière colonne s'exprime comme une combinaison linéaire des autres colonnes. Faire de même pour la dernière ligne.
b) Déterminer le rang de cette matrice en fonction du paramètre complexe λ.
c) On considère le système homogène $Mx = 0$. En fonction de λ, préciser la dimension de l'ensemble des solutions.

Solution : On vérifie que $C_4 = C_1 - C_2 - C_3$ et $L_4 = L_2 + L_3$. En particulier, on sait déjà que le rang de M ne peut valoir 4 (en effet, $\det M = 0$ car ses lignes/colonnes sont linéairement dépendantes). La sous-matrice (*d'autres choix sont possibles*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a un déterminant non nul. Le rang de M vaut donc au moins 2. A ce stade, nous savons déjà que le rang ne peut valoir que 2 ou 3. On peut appliquer la règle des sous-matrices bordées. Celles qui bordent la sous-matrice 2×2 donnée plus haut sont

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda-3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \\ 0 & 2 & \lambda-4 \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on a déjà observé que $L_4 = L_2 + L_3$, ces deux dernières matrices ont un déterminant nul. Il suffit donc de calculer le déterminant des deux premières qui valent respectivement

$$-(\lambda-2)(\lambda+1) \text{ et } (\lambda-2)(\lambda+1).$$

On en conclut que si $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$, alors le rang de M vaut 2, sinon, il vaut 3.

La dimension de l'ensemble des solutions est le nombre d'inconnues (4) moins le rang de la matrice du système. Ainsi, cette dimension vaut 2 si $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$ et la dimension vaut 1, sinon.

4) [6 points] On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$.

a) Vérifier que $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ avec

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution : il suffit de calculer le déterminant formé par ces quatre colonnes. La matrice est bloc-diagonale formée de deux blocs 2×2 de déterminant ± 3 et $\det \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_4 \end{pmatrix} = -9 \neq 0$. On sait que le déterminant est nul si et seulement si les colonnes sont linéairement dépendantes. Ici, on a des vecteurs linéairement indépendants en nombre égal à la dimension de l'espace.

b) Soit F le sous-espace vectoriel (on <u>admet</u> que c'est bien un sous-vectoriel) défini par

$$F = \{ \sum_{i=1}^{4} a_i u_i \mid a_1 + a_2 = 0 \text{ et } a_3 + a_4 = 0 \}.$$

Donner une base de F. En déduire sa dimension.
Solution : les vecteurs $u_1 - u_2$ et $u_3 - u_4$ forment une base de F. En effet, ils forment une partie génératrice : un élément quelconque de F est de la forme

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 + a_3 u_3 - a_3 u_4$$
$$= a_1(u_1 - u_2) + a_3(u_3 - u_4)$$

qui est bien une combinaison linéaire des deux vecteurs proposés. On vérifie facilement qu'ils sont aussi linéairement indépendants (partie libre). La dimension de F vaut donc 2.

c) Donner une base d'un supplémentaire de $\rangle u_1 + u_2, u_3 + u_4 \langle$.
Solution : Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, il suffit de trouver 2 vecteurs y, z tels que $u_1 + u_2, u_3 + u_4, y, z$ soient linéairement indépendants. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a un déterminant non nul. Ainsi, on peut prendre pour y et z (base du supplémentaire), les deux dernières colonnes de cette matrice.

d) Soit G, le sous-ensemble formé des éléments de $\mathbb{R}^4$ dont la première composante dans la base U vaut 1. S'agit-il d'un sous-espace vectoriel ? Justifier.

Solution : Un sous-espace vectoriel contient les combinaisons linéaires de ses éléments. On sait aussi que les composantes de la somme de deux vecteurs est la somme des composantes respectives, i.e., $\Phi_U(x+y) = \Phi_U(x)+\Phi_U(y)$. Si $x, y \in G$, alors la première composante de $x+y$ dans la base U vaut donc $1+1 = 2$. On en conclut que $x+y \notin G$ et donc G n'est *pas* un sous-espace vectoriel.

e) Trouver deux vecteurs w_3 et w_4 tels que $V = (u_1, u_2, w_3, w_4)$ est une base dans laquelle

$$\Phi_V(\begin{pmatrix}4\\4\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Pour rappel, Φ_V donne les composantes d'un vecteur dans la base V.

Solution : Autrement dit, on cherche w_3 et w_4 tels que (*on traduit la notion de composantes dans une base*)

$$\begin{pmatrix}4\\4\\1\\0\end{pmatrix} = 1.u_1+1.u_2+1.w_3+1.w_4 = \begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\end{pmatrix}+w_3+w_4$$

avec la condition supplémentaire que les quatre vecteurs considérés soient linéairement indépendants. On vérifie que

$$w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

conviennent : $\det\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & w_3 & w_4\end{pmatrix} = (-3).(-1)$ est différent de zéro.

f) Avec les vecteurs trouvés au point précédent, donner la matrice de changement de bases pour passer des composantes dans la base U à celles dans la base V.

Solution : Les colonnes de la matrice recherchée A sont $\Phi_V(u_1) = e_1$, $\Phi_V(u_2) = e_2$ (*car* u_1 *et* u_2 *sont les deux premiers vecteurs de la base* V), $\Phi_V(u_3)$ et $\Phi_V(u_3)$. Pour rappel, la matrice vérifie $A\Phi_U(x) = \Phi_V(x)$ pour tout x, donc en particulier, pour les vecteurs de la base U. On trouve

$$u_3 = -\frac{1}{3}.u_1 - \frac{4}{3}.u_2 + 3.w_3 + 2.w_4$$

et

$$u_4 = \frac{1}{3}.u_1 - \frac{5}{3}.u_2 + 3.w_3 + 1.w_4.$$

Ainsi, la matrice demandée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5) [5 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Pour des matrices carrées A, B de même dimension, on a $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

Faux : il suffit de trouver deux matrices qui ne commutent pas (*contre-exemple explicite*). Par exemple, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on trouve

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On peut trouver une matrice carrée A de dimension 2 telle que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Faux : on cherche une unique matrice A ayant la propriété annoncée pour *tout* couple (x, y) (l'ordre des quantificateurs $\exists, \forall$ est important). Si une telle matrice existe, pour $x = 1$ et $y = 0$, on conclut que la première colonne de A doit être $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, pour $x = 2$ et $y = 0$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Soit $n \geq 2$. Si des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants, alors $x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants.
Faux : si $x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants, il existe des scalaires $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Dès lors, on a aussi $0.x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ qui est une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls. On en conclut que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants. Une contradiction.

d) Si x est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$, alors le produit $x.\tilde{x}$ de x par sa transposée est une matrice symétrique $n \times n$.
Vrai : en termes de dimension, x est un vecteur colonne de dimension $n \times 1$ et $\tilde{x}$ est un vecteur ligne de dimension $1 \times n$. Leur produit (dans cet ordre) est donc bien une matrice $n \times n$. On sait que pour deux matrices, $(A.B)^{\sim} = \tilde{B}.\tilde{A}$. Dès lors, $(x.\tilde{x})^{\sim} = \tilde{\tilde{x}}.x = x.\tilde{x}$ qui montre bien que cette matrice est symétrique (égale à sa transposée).

e) Un système linéaire compatible possède toujours une solution non nulle.
Faux : *compatible* signifie l'existence d'une solution (nulle ou pas). Ainsi, il suffit d'exhiber un système possédant uniquement une solution nulle. Un système homogène de Cramer convient.

Par exemple, on peut prendre

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

car le déterminant de la matrice du système vaut 2 (matrice inversible).