Examen d'algèbre vendredi 15 janvier 2021
bacheliers en sc. mathématiques et informatiques

Consignes : Répondre à la théorie et aux exercices sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Fin de l'examen **15h30**. Bon travail.

- Pour les étudiants **ne présentant pas le projet**

1. Donner un exemple de graphe orienté à 4 sommets ne contenant pas de boucle (cycle de longueur 1) et dont la matrice d'adjacence est primitive — argumenter votre construction.

   Un circuit de 4 sommets $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ plus un arc $2 \to 4$ suffit. En effet, le graphe est fortement connexe donc sa matrice est irréductible. De plus, sa période vaut 1 puisqu'on trouve (partant du sommet 1) un cycle de longueur 4 et un cycle de longueur 3. Donc le pgcd des longueurs vaut 1. On conclut en se rappelant qu'une matrice irréductible et apériodique (i.e., période 1) est primitive. Une alternative est de calculer une puissance suffisante (10) de la matrice d'adjacence.

2. Énoncer et démontrer le théorème de Dirac.

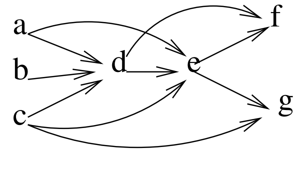
3. Justifier l'inégalité $R(3,3) > 5$ (concernant les nombres de Ramsey).

   Il faut exhiber un coloriage des arêtes d'un graphe complet à 3 (resp. 4, 5) sommets ne contenant aucun triangle monochromatique. Rappeler la définition du nombre de Ramsey $R(s,t)$.

- Pour les étudiants **ayant présenté le projet**

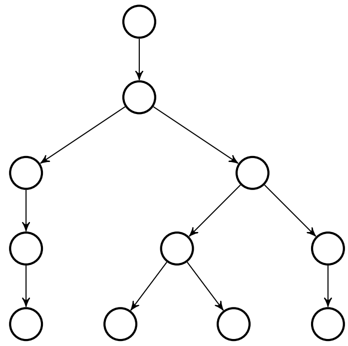
1. Construire un graphe simple orienté dont les 7 sommets sont a, b, c, d, e, f, g, ayant 10 arcs et possédant au moins les 3 tris topologiques
   $a < b < c < d < e < f < g$;
   $a < c < b < d < e < g < f$ et
   $b < a < c < d < e < g < f$.

   Un graphe répondant à la question est donné par :

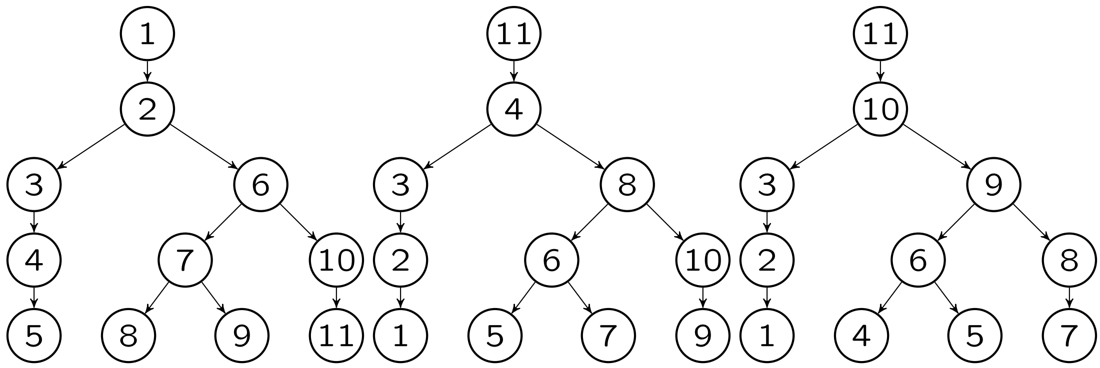


   Dans un tri topologique, s'il y a un arc $\alpha \to \beta$ alors, α sera énuméré avant β. Ne pas oublier de mettre 10 arcs.

2. Recopier l'arbre sur votre feuille (à trois reprises)



y placer les labels des sommets de telle sorte que l'énumération $1, 2, 3, \ldots, 10, 11$ soit préfixe, infixe puis suffixe. Si un sommet possède un seul fils, on suppose qu'il s'agit du fils de gauche.



3. Donner un exemple de graphe à 8 sommets hamiltonien mais non eulérien (justifier).

   Un cycle à 8 sommets auquel on ajoute une arête entre deux sommets non adjacents suffit. En effet, ces deux sommets sont alors de degré 3 (impair). Or un graphe est eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair. Puisqu'on a un cycle passant par les 8 sommets, le graphe est bien hamiltonien (circuit passant une et une seule fois par chaque sommet).

- Pour **TOUS** (exercices 20 points)

1. (5 points) On considère le graphe H formé de deux copies du graphe biparti complet $K_{3,3}$ auxquelles on ajoute une arête entre les sommets correspondants des deux copies (on ajoute ainsi 6 arêtes).

   a) Combien le graphe H possède-t-il d'arêtes ?

      Chaque copie de $K_{3,3}$ possède $3 \times 3 = 9$ arêtes. On a donc $9 + 9 + 6 = 24$ arêtes dans H.

b) Ce graphe est-il eulérien ? Justifier.

Dans $K_{3,3}$ chaque sommet est de degré 3, mais avec l'arête joignant les sommets correspondants des deux copies, chaque sommet de H est de degré 4. Ainsi, H est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. C'est une caractérisation des graphes eulériens.

c) Est-il hamiltonien ? Si oui, donner un circuit hamiltonien.

Si une copie de $K_{3,3}$ a pour sommets $1, \ldots, 6$ et pour arêtes $\{i, j\}$ avec $1 \leq i \leq 3$ et $4 \leq j \leq 6$, on note les sommets correspondants dans la deuxième copie par $1', \ldots, 6'$. On a par exemple le circuit hamiltonien,

$$1 - 4 - 2 - 5 - 3 - 6 - 6' - 3' - 5' - 2' - 4' - 1' - 1.$$

d) Expliquer pourquoi 2 couleurs suffisent pour obtenir un coloriage propre des sommets de H.

Avec les notations du point précédent, $1, 2, 3, 4', 5', 6'$ peuvent recevoir une même couleur. Par définition de H, ces 6 sommets sont indépendants (pas d'arête entre eux). Il en va de même des sommets $4, 5, 6, 1', 2', 3'$.

e) Peut-on obtenir une représentation planaire du graphe ? Si oui, en fournir une. Si non, justifier.

Au vu du thm. de Kuratowski, puisque H contient $K_{3,3}$ comme sous-graphe, H ne peut pas être planaire. Alternative, il n'est même pas nécessaire de faire référence à Kuratowski : un graphe contenant un graphe non planaire comme sous-graphe ne peut être planaire.

2. (7 points) On considère un graphe <u>non orienté</u> formé d'un cycle de 5 sommets numérotés de 1 à 5 ainsi qu'une arête supplémentaire joignant les sommets 1 et 3.

a) Donner la matrice d'adjacence M du graphe.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Montrer qu'il y a 15 circuits de longueur 4 partant et arrivant dans le sommet 1.

Sans être élégant, on peut calculer la puissance 4ième de la matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & 7 & 11 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 3 & 11 \\ 11 & 6 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 6 & 11 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

et l'élément dans le coin supérieur gauche compte le nombre de tels circuits (chemins de longueur 4 partant et revenant en 1).

c) Vérifier que le vecteur de composantes $v = (-1, 0, 1, -1, 1)$ est un vecteur propre de M. En déduire une valeur propre.

   On vérfiera (calculs à faire) que $M.v = (-2)v$ donc -2 est valeur propre.

d) La matrice est-elle irréductible ? Primitive ?

   Le graphe est fortement connexe et possède un circuit de longueur 3 et un circuit de longueur 5, ainsi, sa période vaut 1. Un graphe irréductible et apériodique est primitif. Si on a calculé la puissance 4ième de M au point b), une alternative est de voir que les éléments de cette matrice sont tous > 0.

e) Si on considère cette fois, un cycle de 6 sommets et une arête supplémentaire joignant les sommets 1 et 4, la matrice d'adjacence est-elle primitive ? Quelle est la période du graphe et de là, quels renseignements pouvez-vous obtenir sur l'existence de chemins de longueur n joignant les sommets 1 et 3 ?

   Contrairement au point précédent, même si le graphe reste connexe (la matrice est donc irréductible), les cycles que l'on peut trouver sont de longueur 4, 6, 8, etc. Ainsi, le pgcd des longueur de cycles vaut 2. (On a aussi, dans le cas non orienté, des cycles du type $1-2-1$ de longueur 2.) La période de ce graphe vaut 2, la matrice n'est pas primitive. Si un chemin existe entre les sommets 1 et 3, il est nécessairement de longueur paire. Plus précisément, les longueurs pour lesquelles on trouve au moins un tel chemin sont 2, 4 (avec, par exemple, $1-2-3-2-3$), 6, 8, 10, 12, etc. On met donc en évidence le thm. de structure vu au cours. On a un chemin de longueur $2n$ pour tout $n \geq 1$. On utilise autant que nécessaire des cycles de longueur 4 ou 6 du sommet 1 vers lui-même pour finir avec un chemin $1-2-3$.

3. (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 20 faces triangulaires et p faces pentagonales (où $p > 0$). De chaque sommet de G partent exactement 2 faces triangulaires et 2 faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces pentagonales de G.

   On désigne par s, a, f respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe. Nous pouvons utiliser la formule d'Euler (graphe planaire et connexe),

   $$s - a + f = 2.$$

   On note p le nombre de faces pentagonales. On a les relations suivantes (certaines sont redondantes) :

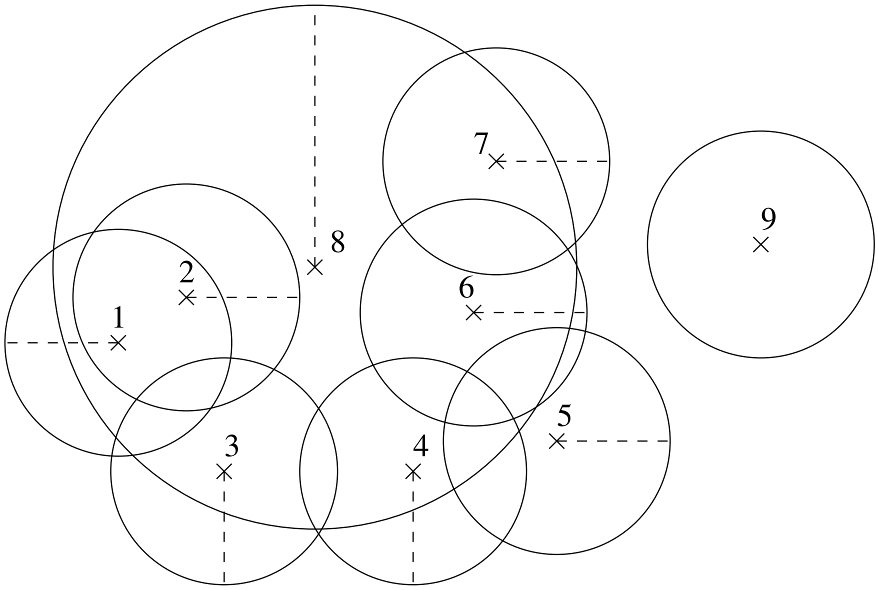
   $$f = 20+p, \quad 4s = 2a, \quad 5p+3.20 = 2a, \quad 2s = 5p, \quad 2s = 3.20.$$

   La deuxième relation provient du fait que chaque sommet est de degré 4 (4 arêtes partent de chaque sommet mais chaque arête a 2 extrémités). La troisième relation exprime que les faces sont délimitées par 5 ou 3 arêtes et que chaque arête appartient à la frontière de 2 faces. La relation suivante exprime que chaque sommet appartient à la frontière de deux faces pentagonales (et chaque face pentagonale a, dans sa frontière, 5 sommets). Enfin, la dernière relation exprime que chaque sommet appartient à la frontière de 2 faces triangulaires (et chaque face triangulaire a, dans sa frontière, 3 sommets). Ce système d'équations linéaires a pour solution unique

   $$s = 30, \quad p = 12, \quad a = 60, \quad f = 32.$$

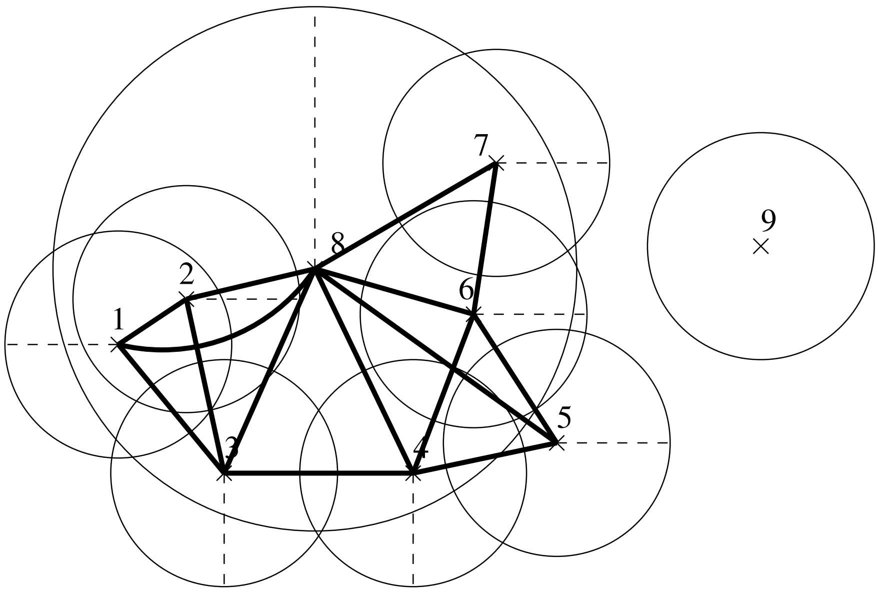
4. (3 points) On dispose de 9 émetteurs localisés géographiquement comme ci-dessous. Sur la figure, on a aussi représenté le rayon d'action spécifique de ceux-ci. On veut éviter les interférences : 2 émetteurs ayant une zone d'action commune doivent émettre sur des fréquences différentes.

   Minimiser le nombre de fréquences différentes à allouer pour éviter les interférences.



Modéliser ce problème en un problème de théorie des graphes : préciser votre choix de sommets et d'arêtes. Quelle notion est importante ? Ensuite, représenter le graphe correspondant et résoudre le problème ainsi traduit.

On considère un graphe à 9 sommets. Chaque sommet correspond à un émetteur. Une arête connecte deux sommets si et seulement si l'intersection des zones d'action des émetteurs correspondants est non vide.



Il s'agit d'un problème de coloriage propre. On a deux copies de K_4 ($\{1,2,3,8\}$ et $\{4,5,6,8\}$), il faut donc au minimum 4 couleurs. En fait, 4 couleurs suffisent: $\{1,4\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,6\}$ et $\{8,9\}$ sont 4 sous-ensembles de sommets indépendants. Il ne s'agit pas du seul coloriage possible. On assigne la même fréquence à tous les émetteurs recevant la même couleur.