Examen de *logique et approche mathématique de la programmation*
8 janvier 2021

La clarté du code, l'efficacité de vos programmes et les spécifications de fonctions interviendront dans la cotation finale. Consignes :

- Produire un code lisible et efficace
- Commenter votre code de façon intelligible
- Les questions doivent être clairement séparées
- Utiliser des noms de variables explicites
- Vos fonctions doivent être spécifiées
- Tester vos programmes (y compris sur les cas pathologiques)
- Sauver régulièrement ; vous devez transmettre un fichier `.py` contenant en commentaire vos nom et prénom, à `M.Lejeune@uliege.be` et `M.Rigo@uliege.be`
- Fin de l'examen : 12h00

Répondre à 3 questions, **au choix**, parmi les 4 questions suivantes. On attribue les mêmes points à chaque question. Préciser la question non retenue.

1. Construire le triangle de Tribonacci :

```
            1
          1   1
        1   3   1
      1   5   5   1
    1   7  13   7   1
  1   9  25  25   9   1
1  11  41  63  41  11   1
```

   où les deux côtés sont formés de 1 et un élément "central" (i.e., qui n'est pas à l'extrémité d'une ligne) est la somme des 3 nombres au-dessus de lui (les deux nombres de la ligne précédente ainsi que le nombre qui apparaît juste au-dessus de lui, deux lignes avant). Ainsi, la ligne suivante du tableau va débuter par 1, puis 1+11+1=13, 11+41+9=61, 41+63+25=129, etc.

   a) Ecrire une fonction qui, étant donné $n \geq 1$, fournit une liste contenant les n éléments de la n-ième ligne.
   b) Ecrire une fonction qui, étant donné $n \geq 1$, écrit dans un fichier (texte) les n premières lignes du triangle.
   c) Ecrire une fonction qui, étant donnés $k, n \geq 1$, fournit une liste contenant les n premiers éléments de la k-ième "diagonale". Par exemple, pour $k = 3$, la troisième diagonale débute avec $1, 5, 13, 25, 41$. On veillera à ne pas recalculer inutilement des éléments du tableau.

2. a) Ecrire une fonction qui prend comme arguments deux listes d'entiers $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ de même longueur $n \geq 1$ et renvoie la liste "alternée" : $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$.

   b) En vous servant explicitement de la fonction construite au point précédent, écrire une fonction qui prend comme arguments deux listes d'entiers $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_m)$ et rend une liste de $\min\{m, n\}$ listes de la forme

$$\begin{gathered}(a_1, b_1),\\ (b_1, a_1, b_2, a_2),\\ (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3),\\ (b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3, b_4, a_4)\\ \vdots\end{gathered}$$

   et ainsi de suite jusqu'à avoir utilisé, pour la première fois, tous les éléments d'une des deux listes au sein d'une même liste construite. Si une des listes fournies comme argument est vide, la fonction doit renvoyer une liste vide.

   Ainsi, avec les listes $[1, 3]$ et $[4, 5, 7]$, la liste renvoyée contiendra $[1, 4]$, $[4, 1, 5, 3]$ tandis qu'avec $[1, 3, 2]$ et $[4, 5, 7]$, la liste produite contiendra $[1, 4]$, $[4, 1, 5, 3]$ et $[1, 4, 3, 5, 2, 7]$.

3. Un *pic* est une suite de trois chiffres consécutifs de la forme $c\,(c+t)\,c$ avec $c \in \{0, \ldots, 9-t\}$ ou, $d\,(d-t)\,d$ avec $d \in \{t, \ldots, 9\}$, pour $t \in \{1, \ldots, 9\}$.
   a) Ecrire une fonction qui renvoie le nombre de pics apparaissant dans l'écriture décimale d'un entier n. Par exemple, 22320 contient un seul pic 232 ; 356505 en contient deux: 565 et 505 (partageant un même chiffre 5). De la même façon, 1513565 en contient 2 tout comme 5656.
   b) Ecrire un programme permettant de trouver le plus petit entier contenant 4 pics.
   c) Trouver tous les nombres premiers inférieurs à 10^6 qui contiennent exactement 3 pics. Stocker les nombres trouvés dans un fichier (texte).

4. On définit $\nu_3(n)$ comme l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui divise n. Ainsi, $\nu_3(35) = 0$, $\nu_3(18) = 2$ et $\nu_3(270) = 3$. On définit également, pour tout entier n,
$$r(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_{2i}^{i}.$$
   Ecrire deux fonctions calculant respectivement $\nu_3(n)$ et $r(n)$. Par exemple, $r(4) = 29$ et $r(5) = 99$. En étayant votre proposition par du code, émettre une conjecture sur la valeur entière de α à donner pour vérifier que
$$\nu_3(r(n)) = \nu_3(\mathrm{C}_{2n}^{n}) + \alpha\, \nu_3(n).$$
   Tester votre code sur les 50 premiers entiers.