Examen d'algèbre lundi 4 janvier 2021
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) [3 points] Donner deux bases (au choix) de $\mathbb{R}^4$ et construire la matrice de changement de bases (on rappellera le contexte, la construction et les notations utilisées). On appliquera cette matrice pour obtenir les composantes du vecteur $(2,0,2,1)^\sim$dans ces deux bases.

On peut prendre la base canonique $U = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ formée des quatre vecteurs unitaires dont toutes les composantes sont nulles sauf une. On a beaucoup de liberté pour répondre à cette question. Considérons

$$V = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4 - e_1).$$

Il s'agit d'une base car la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de V dans la base U, a un déterminant non nul ($= 2$). On a bien 4 vecteurs linéairement indépendants en nombre égal à la dimension de l'espace.

La matrice A est la matrice de changement de bases permettant de passer de la base V à la base U. On a

$$\Phi_U(x) = A\Phi_V(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

En effet, par construction, les colonnes de A sont les composantes des vecteurs de "l'ancienne base" V dans la "nouvelle" U. Le vecteur $(2,0,2,1)^\sim$ se décompose trivialement en $2e_1 + 0e_2 + 2e_3 + 1e_4$ dans la base U. Il reste à décomposer ce vecteur dans la base V. On vérifiera que

$$(2,0,2,1)^\sim = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3) + \frac{5}{2}(e_3 + e_4) - \frac{3}{2}(e_4 - e_1).$$

Une alternative est de calculer et d'utiliser A^{-1} en lui appliquant le vecteur de composantes dans la base U.

2) [4 points] Enoncer et établir le théorème de Steinitz relatif à la dépendance linéaire de combinaisons linéaires.

cf. notes de cours

3) [3 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \beta \\ 3 & 3 & -\beta & 1-\beta \\ 1 & -1 & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de M et déterminer le rang de M en fonction du paramètre complexe β.

   On trouve $\det(M) = -3\beta(2\beta - 1)$. Ainsi le rang vaut 4 si et seulement si $\det(M) \neq 0$, c'est-à-dire pour $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1/2$.

   Si $\beta = 1/2$, on a la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   La sous-matrice 3×3 du coin supérieur gauche a un déterminant non nul (on développe par exemple selon la 3e colonne) ; puisque le rang ne peut pas être 4, dans ce cas, le rang de M vaut 3.

   Si $\beta = 0$, on a la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La sous-matrice privée de la ligne 1 et de la colonne 3 a un déterminant non nul ($= 3$), le rang vaut donc 3. Notez qu'on aurait pu aussi tirer parti du résultat sur les sous-matrices bordées (en partant, par exemple, de la sous-matrice 2×2 du coin supérieur gauche).

b) Déterminer quand cette matrice est inversible.

   Cette matrice est inversible quand son déterminant est non nul, i.e., $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1/2$.

c) On considère le système homogène $Mx = 0$. En fonction de β, préciser la dimension de l'ensemble des solutions.

Soit M est inversible (cf. point b)) et dans ce cas, le système possède l'unique solution 0 (système de Cramer) et $\dim\{0\} = 0$. Soit M n'est pas inversible (pour les 2 valeurs de β discutées plus haut). Dans ce cas, le rang de M vaut 3 donc l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 3 = 1$ (nombre d'inconnues moins le rang de la matrice du système).

4) [5 points] On considère le $\mathbb{R}$-vectoriel E des matrices 3×3 à coefficients réels et le sous-ensemble F suivant

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

- La matrice nulle appartient à F ;
- La somme de deux éléments arbitraires de F appartient à F,

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ a' & 0 & c' \\ -b' & c' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+a' & b+b' \\ a+a' & 0 & c+c' \\ -(b+b') & c+c' & 0 \end{pmatrix},$$

  $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.
- Même conclusion pour la multiplication d'un élément de F par un scalaire ($\in \mathbb{R}$).

b) Donner une base de F et décomposer la matrice suivante dans celle-ci

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons les 3 matrices

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles sont linéairement indépendantes (on peut le montrer en se ramenant à la définition et en considérant une combinaison linéaire de ces matrices donnant la matrice nulle). Elles forment une partie génératrice de F. En effet, tout élément de F se décompose comme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix} = au_1 + bu_2 + cu_3.$$

En particulier, la matrice de l'énoncé se décompose en $2u_1 + u_2$.

c) Quelle est l'intersection de F avec l'enveloppe linéaire

$$G = \rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle.$$

En déduire la dimension de $F + G$.

On peut directement observer que la première matrice M_1 appartient à F mais ce n'est le cas des deux autres. Ainsi, l'intersection doit au moins contenir $\rangle M_1 \langle$. Sans utiliser cette remarque, considérons un élément de l'intersection. Il doit s'écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}}_{\in F} = \underbrace{\begin{pmatrix} f & d+f & e \\ d+f & e & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in G}.$$

En égalant les éléments correspondants des deux matrices, $f=0$, $d=a$, $e=b=0$, $c=0$. Autrement dit, les éléments de l'intersection on exactement la forme aM_1. C'est-à-dire

$$F \cap G = \rangle M_1 \langle.$$

Si on applique la formule donnant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels,

$$\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 3+3-1 = 5.$$

On aura remarqué que les 3 matrices données pour construire G comme enveloppe linéaire sont linéairement indépendantes. Cela justifie que $\dim(G) = 3$.

d) Donner une base d'un supplémentaire de F dans E.

Sachant que $\dim F = 3$ et que $\dim E = 9$, il suffit de trouver 6 matrices $N_1, \ldots, N_6$ tels que $u_1, u_2, u_3, N_1, \ldots, N_6$ soient linéairement indépendants (avec les notations du point b). On peut prendre les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{6} \beta_i N_i = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_4+\alpha_1 & \beta_2 & \alpha_3 \\ \beta_6-\alpha_2 & \beta_5+\alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Si cette combinaison est nulle, cela implique que tous les coefficients sont nuls. Une alternative est de montrer que ces 9 matrices engendrent E.

5) [5 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Soient x, y, z des vecteurs linéairement dépendants. Alors, x, y sont linéairement indépendants.

FAUX. Un contre-exemple suffit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

deux quelconques de ces vecteurs sont linéairement dépendants.

b) On peut trouver des matrices carrées A et B telles que $A.B = -B.A$.

VRAI. Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel, 1 et i sont linéairement dépendants.

FAUX. Dans un $\mathbb{R}$-vectoriel, les scalaires sont les nombres réels. Ainsi, on considère la combinaison linéaire

$$a.1 + b.i = 0 \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ceci implique $a = b = 0$ (seul le nombre complexe 0 a une partie réelle et imaginaire nulles).

d) Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

On a $\rangle F \langle = \mathbb{R}^3$.

VRAI. On remarque que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ appartiennent à F. L'enveloppe linéaire doit contenir toutes leurs combinaisons linéaires, donc tout $\mathbb{R}^3$.

e) Il existe un système d'équations linéaires de 2 équations à 3 inconnues possédant une solution unique.

FAUX. Le sous-espace vectoriel des solutions du système homogène associé a pour dimension 3 moins le rang de la matrice du système. Ce rang vaut au plus 2. Donc, la dimension du sous-espace vaut au moins $3 - 2 = 1$. Un tel système a donc une infinité de solutions (car elles s'obtiennent comme une solution particulière à laquelle on ajoute les solutions du système homogène associé – structure des solutions).