Examen d'algèbre lundi 4 janvier 2021
1ers bacheliers en sc. mathématiques et physiques

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) [2 points] Donner un exemple d'espaces E, F, G tels que E est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension 5, F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et G est un supplémentaire de F dans E.

L'exemple le plus "typique" est $E = \mathbb{R}^5$ vu comme $\mathbb{R}$-vectoriel. Si $e_1, \ldots, e_5$ désignent les 5 vecteurs unitaires dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ième qui est égale à 1 pour e_j, alors on peut choisir $F = \rangle e_1, e_2 \langle$ et $G = \rangle e_3, e_4, e_5 \langle$. Ce sont deux sous-vectoriels car il s'agit d'enveloppes linéaires. Les vecteurs $e_1, \ldots, e_5$ étant linéairement indépendants (c'est aussi le cas de tout sous-ensemble d'entre eux), une base de F est donnée par e_1, e_2. Donc la dimension de F vaut bien 2. De la même façon, celle de G vaut 3. Les deux espaces sont en somme directe car $F \cap G = \{0\}$ — on le vérifie facilement. Ainsi, $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 5$ et on en conclut que $F \oplus G = \mathbb{R}^5$ (sous-espace de $\mathbb{R}^5$ dont la dimension est égale à la dimension de l'espace tout entier). Avoir $F \oplus G = \mathbb{R}^5$ traduit exactement que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^5$. Une alternative au raisonnement sur la dimension est de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^5$ possède une décomposition unique comme somme d'un élément de F et de G.

2) [4 points] Etablir la formule de changement de bases (dans un espace vectoriel de dimension finie). On rappellera le contexte et les notations utilisées.

- Parler des composantes (uniques) d'un vecteur dans une base ;
- Introduire la notation $\Phi_U(x)$ et l'expliquer ;
- On cherche une matrice A telle que, pour tout $x \in E$, $\Phi_V(x) = A\Phi_U(x)$;
- Faire la preuve (cf. notes de cours) dûment justifiée ;
- Mettre en évidence la construction de la matrice A.

3) [4 points] Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \beta^3 \\ 1 & 0 & 2 & \beta^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de M.

Après calculs, on obtient $2\beta^4 - 2\beta^3 - 2\beta + 2$

b) Déterminer quand cette matrice est inversible en fonction du paramètre complexe β.

Cela revient à chercher quand $2\beta^4 - 2\beta^3 - 2\beta + 2 = 0$. Le polynôme se factorise en

$$2(\beta - 1)^2 \left(\beta^2 + \beta + 1\right).$$

Pour résoudre l'équation $\beta^2 + \beta + 1 = 0$, on en cherche le réalisant Δ et on trouve les zéros

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul donc si β diffère de 1 et des deux complexes ci-dessus.

c) Quand la matrice n'est pas inversible, quel est son rang ?

On sait déjà que le rang ne peut être maximal, il est donc au plus égal à 3. La sous-matrice 2×2 B occupant le coin supérieur gauche à un déterminant non nul (-2). Le rang vaut donc au moins 2.

Si $\beta = 1$, la matrice a la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La sous-matrice 3×3 occupant le coin inférieur droit à un déterminant non nul (-2). Le rang vaut donc 3. On aurait pu aussi utiliser la méthode des sous-matrices bordées et calculer, dans le pire cas, 4 déterminants de matrices 3×3 bordant B.

Pour $\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, on procède exactement de la même façon et la conclusion est identique. Donc, dans tous les cas, le rang vaut 3.

d) On considère le système homogène $Mx = 0$. En fonction de β, préciser la dimension de l'ensemble des solutions.

Soit M est inversible (cf. point b)) et dans ce cas, le système possède l'unique solution 0 (système de Cramer) et $\dim\{0\} = 0$. Soit M n'est pas inversible (pour les 3 valeurs de β discutées plus haut). Dans ce cas, le rang de M vaut 3 donc l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension $4 - 3 = 1$ (nombre d'inconnues moins le rang de la matrice du système).

4) [5 points] On considère le $\mathbb{C}$-vectoriel E des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 4 et le sous-ensemble F suivant

$$F = \{az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

- Le vecteur nul appartient à F.
- Si $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a$ et $a'z^4 + b'z^3 + c'z^2 + b'z + a'$ sont deux éléments arbitraires de F, $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{C}$, alors leur somme

  $$(a + a')z^4 + (b + b')z^3 + (c + c')z^2 + (b + b')z + (a + a')$$

  est bien encore un élément de F.
- On procède de façon analogue quand on multiplie un élément de F par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Donner une base de F et décomposer $2z^4 - z^3 - z + 2$ dans celle-ci.

Une base de F est donnée par $u_1 = z^4 + 1$, $u_2 = z^3 + z$ et $u_3 = z^2$. Il s'agit bien de 3 éléments de F. On vérifie aisément qu'ils sont linéairement indépendants (par exemple en utilisant la définition de l'indépendance linéaire). Ils forment aussi une partie génératrice (on doit le vérifier car on ne connaît pas *a priori* la dimension de F). En effet, tout élément $az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a$ se décompose en $au_1 + bu_2 + cu_3$. Ainsi,

$$2z^4 - z^3 - z + 2 = 2u_1 - u_2.$$

c) Quelle est l'intersection de F avec l'enveloppe linéaire

$$G = \rangle z^4 + 1,\ z^3 + 1,\ z^2 + 1\langle.$$

En déduire la dimension de $F + G$.

On peut directement observer que $z^4 + 1$ appartient à F mais ce n'est le cas ni pour $z^3 + 1$, ni pour $z^2 + 1$. Ainsi, l'intersection doit au moins contenir $\rangle z^4 + 1\langle$. Sans utiliser cette remarque, considérons un élément de l'intersection. Il doit s'écrire

$$\underbrace{az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a}_{\in F} = \underbrace{dz^4 + ez^3 + fz^2 + d + e + f}_{\in G}$$

Si on égale les coefficients correspondant à un même monôme, on a

$$a = d, b = e, c = f, b = 0, a = d + e + f.$$

On en tire $b = e = 0$ et finalement, $f = c = 0$. Autrement dit, les éléments de l'intersection on exactement la forme $az^4 + a$, $a \in \mathbb{C}$. C'est-à-dire

$$F \cap G = \rangle z^4 + 1\langle.$$

Si on applique la formule donnant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels,

$$\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 3+3-1 = 5.$$

On justifiera que $\dim(G) = 3$ en remarquant que les 3 vecteurs définissant l'enveloppe sont linéairement indépendants (ils forment donc une base de G).

d) Donner une base d'un supplémentaire de F dans E.

Sachant que $\dim F = 3$ et que $\dim E = 5$, il suffit de trouver 2 vecteurs u_4 et u_5 tels que $u_1, \ldots, u_5$ soient linéairement indépendants (avec les notations du point b). Par exemple $u_4 = z$ et $u_5 = 1$ conviennent. Pour vérifier que ces 5 éléments sont linéairement indépendants (on peut bien sûr revenir une fois encore à la définition), considérons leurs composantes dans la base canonique $z^4, z^3, z^2, z, 1$ et calculons le déterminant de la matrice (triangulaire) formée par ces composantes:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

On en déduit que les colonnes sont linéairement indépendantes donc $u_1, \ldots, u_5$ aussi (on exploite le fait que le passage aux composantes est un isomorphisme).

5) [5 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Trois sous-espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite à $\{0\}$.

FAUX. Il suffit de donner un contre-exemple. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique e_1, e_2, les trois sous-espaces $\rangle e_1 \langle$, $\rangle e_2 \langle$ et $\rangle e_1 + e_2 \langle$ ont une intersection réduite à $\{0\}$. Pourtant ils ne sont pas en somme directe, le vecteur nul possède plusieurs décompositions comme somme d'éléments des différents sous-espaces ; par exemple $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2)$.

b) On peut trouver des matrices carrées A et B telles que $A.B = 0$ et $B.A \neq 0$.

VRAI. Prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Si les vecteurs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants, alors il en est de même pour

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

VRAI. On peut invoquer le résultat stipulant que les 3 vecteurs colonnes sont dépendants si et seulement si tous les mineurs d'ordre 3 que l'on peut extraire sont nuls (donc, les vecteurs correspondants sont dépendants).

Alternative, par définition, il existe des scalaires non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de remarquer que ces relations ont lieu ligne par ligne (pour chaque composante), en particulier, pour les lignes $1, 3, 4$.

d) Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'ensemble

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est un sous-espace vectoriel.

FAUX. Il suffit d'observer que $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à l'ensemble. Alternative, $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ appartiennent à l'ensemble mais pas leur somme.

e) Soit un système linéaire compatible de n équations à p inconnues. Si $n < p$, alors le système possède une unique solution.

FAUX. L'ensemble des solutions (structure des solutions) est décrit par une solution particulière à laquelle on ajoute les éléments d'un sous-vectoriel (ensemble des solutions du système homogène associé) dont la dimension est donnée par $p - rg(M)$ où M est a matrice du système. Le rang de M vaut au plus n (la plus petite des deux dimensions). Ainsi le sous-vetoriel a une dimension $p - rg(M) \geq p - n > 0$. On en conclut qu'il y a une infinité de solutions.

On pouvait fournir un contre-exemple. Un des plus simple est $x + y = 0$ pour lequel $n = 1$, $p = 2$ et qui possède une infinité de solutions.