Examen d'algèbre

Premiers bacheliers en sciences mathématiques et physiques,
lundi 6 janvier 2020 — correction

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) [4 pts]

a) Définir les notions de *partie génératrice* d'un espace vectoriel E et d'espace vectoriel de *dimension finie.*

b) Enoncer les deux lois des mineurs (dans l'une, le résultat donne le déterminant et dans l'autre, zéro).

c) <u>Démontrer</u> que deux bases d'un espace de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

2) [2 pts] Donner un exemple de 2 sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^5$ qui sont en somme directe et dont la somme est strictement incluse dans $\mathbb{R}^5$. Donner un supplémentaire de $F+G$ dans $\mathbb{R}^5$. Justifier vos constructions.

Soient $e_1, \ldots, e_5$ les 5 vecteurs unitaires (e_i possède un unique 1 en position i et des zéros ailleurs) formant une base de $\mathbb{R}^5$. On peut prendre $F = \rangle e_1, e_2 \langle$. On sait, par définition, qu'une enveloppe linéaire est un sous-espace vectoriel. De même $G = \rangle e_3, e_4 \langle$. Il est clair que F et G sont en somme directe car

$$F = \{(a, b, 0, 0, 0)^{\sim} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \text{ et } G = \{(0, 0, c, d, 0)^{\sim} \mid c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Donc $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul. Ensuite $F+G$ est inclus strictement dans $\mathbb{R}^5$ car $\dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G) = 4 < 5$. Une autre justification est de montrer que e_5 n'appartient par à $F+G$ d'où l'inclusion stricte. Comme supplémentaire de $F+G$ dans $\mathbb{R}^5$, il suffit alors de prendre $\rangle e_5 \langle$. En effet, $F+G$ et $\rangle e_5 \langle$ sont bien en somme directe (même type de justification) et $F+G+\rangle e_5 \langle = \mathbb{R}^5$.

3) [5 pts] AU CHOIX (ne répondez qu'à <u>une</u> des deux questions)

- Enoncer et démontrer le théorème de Rouché (conditions nécessaires et suffisantes pour la compatibilité d'un système d'équations linéaires). Préciser les dimensions des matrices utilisées.
- Enoncer et démontrer la formule de changement de bases dans un espace vectoriel de dimension finie.

4) [4 pts] <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) Un déterminant est nul si et seulement si une colonne ou une ligne de la matrice est nulle.

FAUX. Un contre-exemple est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

qui possède un déterminant nul et aucun élément nul.

b) Si des vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ sont linéairement dépendants, on peut trouver un vecteur z tels que $u_1, \ldots, u_k, z$ soient linéairement indépendants.

FAUX. On sait qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des scalaires non tous nuls tels que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$. Donc, la combinaison $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + 0.z$ donne le vecteur nul sans pour autant que tous les coefficients soient nuls. Cela prouve que $u_1, \ldots, u_k, z$ sont linéairement dépendants (on a trouvé une combinaison à coefficients non tous nuls).

c) L'application

$$f : \mathbb{R}_n^n \to \mathbb{R},\ A \mapsto \det(3A)$$

est linéaire sur les colonnes.

VRAI. D'abord on remarque que $\det(3A) = 3^n \det(A)$. On peut alors conclure car $\det(\cdot)$ est une application linéaire sur les colonnes. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} \alpha X + \beta Y & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} f(A) &= 3^n \det \begin{pmatrix} \alpha X + \beta Y & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha\, 3^n \det \begin{pmatrix} X & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} + \beta\, 3^n \det \begin{pmatrix} Y & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha\, f \begin{pmatrix} X & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} + \beta\, f \begin{pmatrix} Y & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Les polynômes $x^2 + x + 1$, $x^2 + 4x + 3$, $3x + 2$, 5 forment une partie génératrice de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

VRAI. On peut remarquer que x^2+x+1, $3x+2$, 5 forment une base de cet espace (donc en particulier, une partie génératrice). En effet, ils sont en nombre égal à la dimension de l'espace et ils sont linéairement indépendants. Pour le voir, si on considère les composantes de ces vecteurs dans la base $(x^2, x, 1)$, il suffit de calculer le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 15 \neq 0$$

Une alternative est de montrer que tout polynôme $ax^2 + bx + c$ peut se décomposer à l'aide des polynômes proposés. Ainsi, il vient

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + x + 1) + \frac{b - a}{3}(3x + 2) + \frac{c - a/3 - 2b/3}{5} 5.$$

Dans les questions qui suivent, pour répondre à un point précis, vous pouvez toujours supposer acquis les résultats des points précédents.

5) [6 pts] Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Montrer que $A^3 - A^2 = -6I$. (Faites le calcul explicitement.) Les matrices I, A, A^2, A^3 sont-elles linéairement indépendantes ?

On trouve

$$A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 3 \\ -2 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La conclusion $A^3 - A^2 = -6I$ suit aisément. En particulier, on a

$$A^3 - A^2 + 0.A + 6.I = 0$$

on a donc une relation linéaire à coefficients non tous nuls liant les matrices I, A, A^2, A^3. Elles sont donc linéairement dépendantes.

b) Montrer que chacune des matrices A^3, A^4, A^5, A^6 s'exprime comme une combinaison linéaire de I, A, A^2.

On va utiliser le point précédent. On sait déjà que $A^3 = A^2 - 6I$. De là, en multipliant les deux membres par A, on trouve

$$A^4 = A^3 - 6A = A^2 - 6A - 6I$$

$$A^5 = A^3 - 6A^2 - 6A = -5A^2 - 6A - 6I$$

$$A^6 = -5A^3 - 6A^2 - 6A = -5(A^2 - 6I) - 6A^2 - 6A = -11A^2 - 6A + 30I.$$

c) Les matrices matrices A^3, A^4, A^5, A^6 sont-elles linéairement dépendantes ?

Au vu du point précédent, ces quatre matrices s'obtiennent comme combinaisons linéaires des 3 matrices I, A, A^2. En conséquence directe du théorème de Steinitz (4 combinaisons linéaires de 3 vecteurs), ces matrices sont linéairement dépendantes.

d) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

On calcule $\det(A) = -6$. La matrice est donc inversible et on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

e) Déterminer la/les éventuelle(s) solution(s) du système $Ax = 0$.

Nous venons de voir que A était inversible. On est donc en présence d'un système de Cramer. Un tel système possède une solution unique donnée par $A^{-1}0 = 0$. La solution est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\sim}$.

f) On considère la matrice-blocs de dimension 9 donnée par

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 7A \\ 0 & 2A & 4A \\ 0 & 0 & 3A \end{pmatrix}$$

où chaque bloc est de dimension 3. Que vaut son déterminant ?

Pour une matrice bloc-triangulaire, le déterminant est donné par le produit des déterminants des blocs diagonaux. Ainsi, on trouve

$$\det(A). \det(2A). \det(3A).$$

Or, A étant de dimension 3 et le déterminant étant linéaire sur les colonnes, on trouve finalement

$$\det(A).2^3 \det(A).3^3 \det(A) = 6^3.(-6)^3 = -6^6 = -46656.$$

6) [4 pts] Etudier le rang de M en fonction de la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de λ, le système

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

est-il compatible ? Dans chaque cas, la solution est-elle ou non unique ?
Remarque : Il n'est PAS nécessaire de résoudre ce système.

Le déterminant de M vaut $\lambda^3 - 1$ (par exemple, en utilisant la règle des mineurs). Ainsi, $\det(M) = 0$ si et seulement si $\lambda^3 = 1$. Autrement dit, le déterminant est nul et seulement si λ est une racine cubique de l'unité (n'oubliez pas que λ est complexe) : 1, $e^{2i\pi/3} = (-1+\sqrt{3}i)/2$ ou $e^{4i\pi/3} = (-1-\sqrt{3}i)/2$.

Ainsi si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$, le rang de M vaut 4 et le système est de Cramer. Il est compatible et possède même une solution unique.

Etudions à présent les autres cas. Si $\lambda = 1$, la matrice M est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que les colonnes $1, 3, 4$ sont linéairement indépendantes. Dans ce cas, le rang de M vaut 3. Calculons le rang de la matrice augmentée

$$(M|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière colonne étant la somme des deux précédentes, le rang reste égal à 3. (Une alternative est d'utiliser la métode des sous-matrices bordées.) Puisque $rg(M) = rg(M|B)$, le système est compatible. La dimension de l'ensemble des solutions est donnée par $4 - rg(M) = 1$. Il y a donc une infinité (simple) de solutions.

Si $\lambda = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ (traitons les deux dernières racines en une seule fois), le rang de M ne peut pas être égal à 4 (puisque son déterminant est nul). On vérifie qu'il vaut 3 en considérant la sous-matrice obtenue en supprimant la colonne 2 et la ligne 3 (le déterminant vaut alors 1). Donc le rang de M vaut 3. Intéressons-nous au rang de la matrice augmentée

$$(M|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour que le système soit compatible, il faut que son rang soit également égal à 3. Par la méthode des sous-matrices bordées (la sous-matrice de M obtenue en supprimant la colonne 2 et la ligne 3 étant de déterminant non nul), nous devons vérifier que la matrice bordée obtenue en ajoutant la cinquième colonne et la ligne 3 a un déterminant nul. Or,

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \neq 0.$$

Dès lors, $rg(M) = 3 < 4 = rg(M|B)$. Ici, le système est incompatible.

7) [5 pts] Soient $G \subset \mathbb{R}_4^4$ l'ensemble des matrices dont chaque ligne est une permutation circulaire (d'un cran vers la gauche) de la ligne précédente et $D \subset \mathbb{R}_4^4$ l'ensemble des matrices dont chaque ligne est une permutation circulaire (d'un cran vers la droite) de la ligne précédente.

$$\text{Par exemple,}\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \in G \text{ et } \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} \in D.$$

a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4^4$. La matrice nulle appartient bien à G. Si

$$X = \begin{pmatrix}a & b & c & d\\ b & c & d & a\\ c & d & a & b\\ d & a & b & c\end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix}e & f & g & h\\ f & g & h & e\\ g & h & e & f\\ h & e & f & g\end{pmatrix}$$

appartiennent à G, on vérifie que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda X + \mu Y = \begin{pmatrix}\lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f & \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h\\ \lambda b + \mu f & \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h & \lambda a + \mu e\\ \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h & \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f\\ \lambda d + \mu h & \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f & \lambda c + \mu g\end{pmatrix}$$

appartient encore à G.

b) Donner une base de G.

Les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

forment une partie génératrice de

$$G = \left\{ \begin{pmatrix}a & b & c & d\\ b & c & d & a\\ c & d & a & b\\ d & a & b & c\end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

De plus, ces quatre matrices sont linéairement indépendantes, il suffit de regarder la première ligne de chacune d'elles pour s'en convaincre.

c) En déduire la dimension d'un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_4^4$.

Puisque $\dim \mathbb{R}_4^4 = 16$, la dimension d'un supplémentaire vaut $16 - 4 = 12$.

d) Donner une base de $G \cap D$? En déduire la dimension de $G + D$.

Si une matrice appartient à l'intersection, elle doit simultanément appartenir à G et D. Considèrons le système de 16 équations donné par

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ h & e & f & g \\ g & h & e & f \\ f & g & h & e \end{pmatrix}.$$

On trouve $a = c = e = g$ et $b = d = f = h$. Ainsi,

$$G \cap D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Une base de cet espace est donc donnée par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De là,

$$\dim(G + D) = \dim(G) + \dim(D) - \dim(G \cap D) = 4 + 4 - 2 = 6.$$

e) Soit S le sous-espace des matrices symétriques de $\mathbb{R}^4_4$.
Montrer que $\dim(S \cap G) > \dim(S \cap D)$.

On remarque que toute matrice de G est en particulier symétrique. Donc $G \cap S = G$ et $\dim(G \cap S) = 4$. Par contre, D contient des matrices qui ne sont pas symétriques (celle donnée en début d'énoncé par exemple). Donc $(D \cap S)$ est inclus strictement dans D. Par conséquent, $\dim(S \cap D) < \dim(D) = 4$.