Examen de *logique et approche mathématique de la programmation*
10 janvier 2020

La clarté du code, l'efficacité de vos programmes et les spécifications de fonctions interviendront dans la cotation finale. Consignes :

- Produire un code lisible et efficace
- Commenter votre code de façon intelligible
- Les questions doivent être clairement séparées
- Utiliser des noms de variables explicites
- Vos fonctions doivent être spécifiées
- Tester vos programmes (y compris sur les cas pathologiques)
- Sauver régulièrement ; vous devez fournir un fichier `.py` ou `.ipynb` (sous Jupyter) contenant en commentaire vos nom et prénom
- Fin de l'examen : 12h30

Répondre à 4 questions, **au choix**, parmi les 5 questions suivantes. Chaque question est cotée sur 5 points. <u>Préciser</u> la question non retenue.

1. Ecrire une fonction qui prend comme argument une liste d'entiers $(a_1, \ldots, a_n)$ et renvoie une liste de chaînes de caractères de la forme
$$\text{“}a_1a_1\text{”},$$
$$\text{“}a_1a_1a_2a_2a_1a_1\text{”},$$
$$\vdots$$
$$\text{“}a_1a_1a_2a_2\cdots a_{n-2}a_{n-2}a_{n-1}a_{n-1}a_{n-2}a_{n-2}\cdots a_2a_2a_1a_1\text{”}$$
$$\text{“}a_1a_1a_2a_2\cdots a_{n-2}a_{n-2}a_{n-1}a_{n-1}a_na_na_{n-1}a_{n-1}a_{n-2}a_{n-2}\cdots a_2a_2a_1a_1\text{”}.$$
Si la liste est vide, le programme renvoie la chaîne “liste vide”.
Par exemple, la donnée [1,27,3] retourne la liste de chaînes
`[‘‘11’’,‘‘11272711’’,‘‘11272733272711’’]`.

2. a) Ecrire une fonction qui prend comme argument une liste non vide d'entiers $(a_0, \ldots, a_n)$ et renvoie `True` si et seulement s'il existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tel que
$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_n$$
Par exemple,
$$(1, 7, 7, 15, 12, 9, 3),\ (1, 2, 3, 4, 5),\ (7, 4, 3),\ (1, 20, 15, 10, 1),\ (9, 9)$$
sont toutes des instances vérifiant la condition.
b) Parmi les 6^7 suites de longueur 7 dont les éléments appartiennent à $\Sigma = \{0, \ldots, 5\}$, combien vérifient la condition du point a) ? (Il y en a un peu plus de 4%). Par exemple $(0, 0, 4, 4, 5, 1, 0)$ en est une.
Sauver ces listes dans un fichier. Ecrire un programme générique pour des listes de longueur arbitraire et un ensemble arbitraire Σ de naturels.

3. Soit α un entier naturel non nul fixé. On définit les suites $(r_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ comme suit : $r_0 = v_0 = 1$, $r_1 = 2$, $v_1 = 3$ et, pour tout $n \geq 2$,

$$r_n = \begin{cases} \alpha\, r_{n-1} + v_{n-2}, & \text{si } r_{n-1} \text{ pair ;} \\ 2r_{n-1} - v_{n-2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$v_n = \begin{cases} r_{n-1} + 2v_{n-2}, & \text{si } v_{n-1} \text{ pair ;} \\ r_{n-1} + v_{n-2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Ecrire un programme qui renvoie les valeurs de r_n et v_n pour des paramètres n et α donnés. Par exemple, pour $\alpha = 3$, r_{100} vaut

$$8392867113322628805152040590839$$

   b) Déterminer la valeur de $\alpha \in \{1, \ldots, 50\}$ pour laquelle $r_{20} = 3654465211$. Fournir le code menant à votre réponse.

4. Pour tout entier naturel $n > 0$ qui se décompose dans le système décimal usuel comme

$$n = \sum_{i=0}^{\ell} c_i\, 10^i,$$

les c_i étant des chiffres de $\{0, \ldots, 9\}$, on définit la fonction $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$S(n) = (c_\ell + 1).S\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} c_i\, 10^i\right)$$

et $S(c) = c + 1$ si $c \in \{0, \ldots, 9\}$. Par exemple, $S(230) = 12$.

   a) Ecrire une fonction qui prend en entrée un naturel $n > 0$ et renvoie la valeur de $S(n)$.
   b) Quelle valeur de $S(n)$ apparaît le plus fréquemment pour $n \in \{1, \ldots, 9999\}$? Combien de fois cette valeur la plus fréquente apparaît-elle ?

5. La suite de Chang et Tsai est définie comme suit. Soit a un naturel non nul. On pose $c_0 = c_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$,

$$c_n^{(a)} = \min_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} \left(a\, c_{n-k}^{(a)} + c_k^{(a)}\right).$$

   a) Ecrire une fonction qui prend en entrée deux naturels $a, n > 0$ et renvoie la valeur de $c_n^{(a)}$.
   b) En calculant les valeurs de $c_{2^i}^{(a)}$ pour $i = 1, \ldots, 8$ et pour différentes valeurs du paramètre a, quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la valeur de $c_{2^i}^{(a)}$ pour tout i ?
   c) Quels éléments appartiennent à

$$\{c_n^{(2)} \mid 1 \leq n \leq 1000\} \cap \{c_n^{(3)} \mid 1 \leq n \leq 1000\}.$$

Etayer vos réponses par du code.