Examen de théorie des graphes — Janvier 2019

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Feuilles distinctes pour théorie et exercices !

- Pour les étudiants **n'ayant PAS présenté** le projet.

Th. 1 Enoncer et démontrer le théorème de Dirac.

Th. 2 Donner un exemple de graphe non orienté possédant au moins deux cycles dont la matrice d'adjacence est irréductible, mais pas primitive. Pour cet exemple, quelle en est la période ?

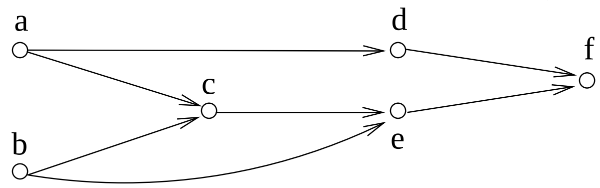
Th. 3 Enoncer une caractérisation algébrique des graphes bipartis.

Th. 4 Définir les nombres de Ramsey. Expliquer pourquoi $R(3,3) > 5$? Comment généraliser les nombres de Ramsey à plus de 2 couleurs ?

- Pour les étudiants **ayant présenté** le projet.

Th. 1 Définir la notion de graphe hamiltonien. Donner un exemple de graphe hamiltonien et un exemple de graphe non hamiltonien. Ces graphes auront au moins 6 sommets.

Th. 2 Fournir tous les tris topologiques du graphe ci-dessous (il y en a 7) :



Th. 3 a) Définir la notion de matrice primitive.

b) La matrice suivante est-elle primitive ? (plusieurs justifications sont possibles)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

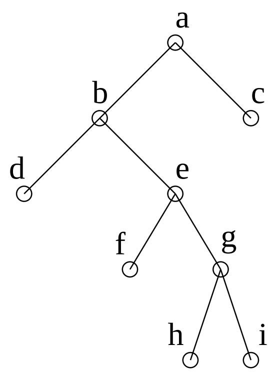
c) Sachant que ses valeurs propres sont

$$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \simeq 1,618;\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \simeq -0,618;\ 0$$

quels renseignements tirez-vous sur M^n quand $n \to \infty$?

d) Représenter le graphe orienté ayant M pour matrice d'adjacence.

Th. 4 Donner les parcours préfixe, infixe et suffixe de l'arbre ci-dessous

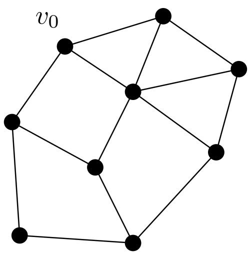


• • Pour **TOUS** les étudiants — partie exercices

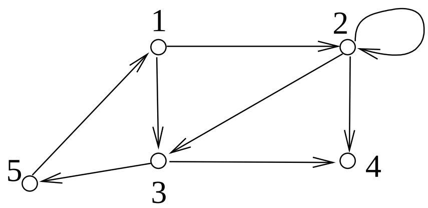
Ex. 1 On considère l'algorithme suivant auquel on fournit en entrée un graphe simple non orienté $G = (V, E)$. Pour rappel, $\nu(u)$ dénote l'ensemble des voisins de u.

```
Considérer un sommet quelconque $v_0 \in V$
Composante:= $\{v_0\}$,  New:= $\{v_0\}$,  Aretes:= $\emptyset$
Tant que New$\neq \emptyset$
  Voisins:= $\emptyset$
  pour tout sommet $u$ appartenant à New
    Voisins:= Voisins$\cup \nu(u)$
  New:= Voisins$\setminus$Composante
  pour tout sommet $v$ appartenant à New
    sélectionner une arête $\{v, w\}$ telle que $w \in$Composante
    ajouter cette $\{v, w\}$ à Aretes
  Composante:= Composante$\cup$New
```

a) Appliquer l'algorithme au graphe ci-contre.
b) Après l'exécution de cet algorithme, que contient `Composante` ? Justifier.
c) quelles propriétés possède le graphe (`Composante`,`Aretes`) obtenu ? Justifier.
d) Dans quelle situation « réelle » pourrait-on utiliser cet algorithme ?



Ex. 2 On donne le graphe orienté ci-dessous



a) Donner sa matrice d'adjacence A.
b) Donner les éléments de la diagonale de A^3. Justifier.
c) Quel est le nombre minimum d'arc(s) à ajouter pour rendre le graphe fortement connexe ? Fournir ce(s) arc(s).
d) Donner un chemin simple de longueur maximale. Justifier.
e) Avec les notations du cours, si ce graphe est vu comme un ensemble de pages Web et de liens, donner les matrices H (hyperliens) et S (stochastique) utilisées dans l'algorithme du PageRank. Comment calculerait-on la matrice G utilisée par Google (une formule détaillée suffit).

Ex. 3 On considère un graphe planaire connexe G ayant 8 faces triangulaires et 18 faces carrées. De chaque sommet de G partent trois faces carrées et une face triangulaire. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G. Justifier votre raisonnement.

Ex. 4 a) Prouver que dans un graphe simple connexe (non orienté) deux chemins simples de longueur maximale ont toujours un sommet commun.
b) Prouver que si un graphe possède exactement deux sommets de degré impair, alors ces sommets sont connectés par un chemin.