Examen d'algèbre

Premiers bacheliers en sciences mathématiques et physiques,
lundi 7 janvier 2019

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Donner trois définitions du rang d'une matrice $A \in \mathbb{K}_q^p$.

2) Soit $A \in \mathbb{R}_n^n$. On considère le système d'équations linéaires $Ax = b$. La matrice A est donnée par ses colonnes $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$.

a) Quand dit-on que ce système est un système de Cramer ?
Enoncer les formules de Cramer.

b) Supposons $b = 0$. A quelle condition le système $Ax = 0$ possède-t-il une solution non nulle ? Justifier votre affirmation.

c) Montrer que l'ensemble des solutions du système $Ax = 0$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?

3) Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

a) $F \cap G$ est-il toujours un sous-espace vectoriel de E ?

b) Définir l'enveloppe linéaire $\rangle A \langle$ d'un ensemble $A \subset E$.

c) Définir la somme des deux sous-espaces vectoriels F et G.

d) Montrer que $\rangle F \cup G \langle \subseteq F + G$

4) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a) On peut trouver deux sous-espaces vectoriels F, G de $\mathbb{R}^4$ tels que $\dim(F + G) = \dim(F)$.

b) Soient $k \geq 1$ un entier, $u_1, \ldots, u_k$ des éléments de $\mathbb{C}^n$, des scalaires $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{k+1,1}, \ldots, \alpha_{k+1,k} \in \mathbb{C}$. Les éléments

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j}\, u_j, \quad i = 1, \ldots, k+1$$

sont linéairement dépendants.

c) L'application

$$f : \mathbb{R}_2^2 \to \mathbb{R},\ A \mapsto a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2}$$

est linéaire sur les colonnes.

d) Les polynômes $x^2 + x + 1$, $x^2 + 4x + 3$, $3x + 2$, 5 forment une partie génératrice de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.

5) Soient

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

des éléments de $\mathbb{R}^4$.

a) Montrer que u_1, u_2, u_3, u_4 forment une base U de $\mathbb{R}^4$.

b) On considère les éléments $w_1 = u_1 + u_2$, $w_2 = u_1 - u_3$, $w_3 = u_1 + u_2 + u_3$ et $w_4 = u_2 - u_4$. On admet qu'ils forment une base W de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de changement de bases pour passer de la base W à la base U.

c) Donner les composantes de $3w_1 + w_2 - w_4$ dans la base W puis, dans la base U.

6) Pour quelles valeurs de λ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice n'est pas inversible, donner un vecteur colonne $x \neq 0$ et un vecteur ligne $y \neq 0$ tels que $Mx = 0$ et $yM = 0$.

7) Soit $F \subset \mathbb{R}_4^4$ l'ensemble des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est nulle, i.e.,

$$A \in F \Leftrightarrow \left(\forall j \in \{1, \ldots, 4\}, \sum_{i=1}^{4} a_{i,j} = 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \ldots, 4\}, \sum_{j=1}^{4} a_{i,j} = 0 \right).$$

Par exemple,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \in F$$

a) Donner un élément de F tel que $a_{1,1} = a_{4,1} = a_{1,4} = a_{4,4} = 1$.

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4^4$.

c) Donner, *sans justifier*, une base de F.

d) En déduire la dimension d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4^4$.

e) Soit S le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathbb{R}_4^4$. Justifier le fait que

$$\dim(F \cap S) = 6.$$