Examen écrit de théorie des graphes
Janvier 2018

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

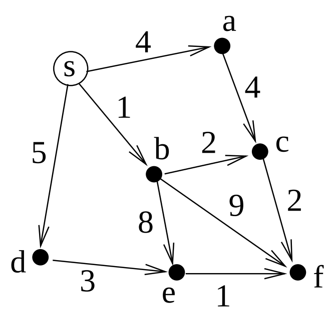
Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

(1) Démontrer que le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

(2) Définir les notions de graphe biparti, de tri topologique d'un graphe orienté, d'homomorphisme de graphes, de matrice primitive.

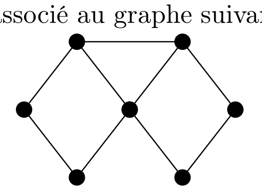
(3) Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe orienté et pondéré suivant, source s. On considérera les itérations successives de l'algorithme en fournissant les valeurs des variables $T(v)$ et $C(v)$ pour chaque sommet $v \neq s$ (poids actuel et chemin réalisé pour le sommet v)



Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points) Soit G un graphe simple. Le *graphe ligne* de G, noté $L(G)$, est construit comme suit : à chaque arête de G correspond un sommet de $L(G)$. Deux arêtes de G sont adjacentes (i.e., ont une extrémité en commun) si et seulement si les sommets correspondants de $L(G)$ sont voisins.

(a) Tracer le graphe ligne associé au graphe suivant :



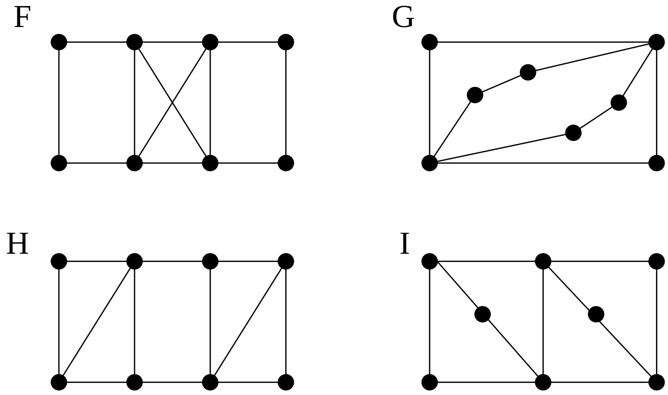
(b) Montrer que si G est eulérien, alors $L(G)$ est hamiltonien.

(c) Soit $\{u, v\}$ une arête de G. A cette arête, correspond un sommet de $L(G)$. Comment exprimer le degré de ce sommet de $L(G)$ à partir des degrés de u et v dans G ?

(d) Montrer que si G est eulérien, alors $L(G)$ est eulérien.

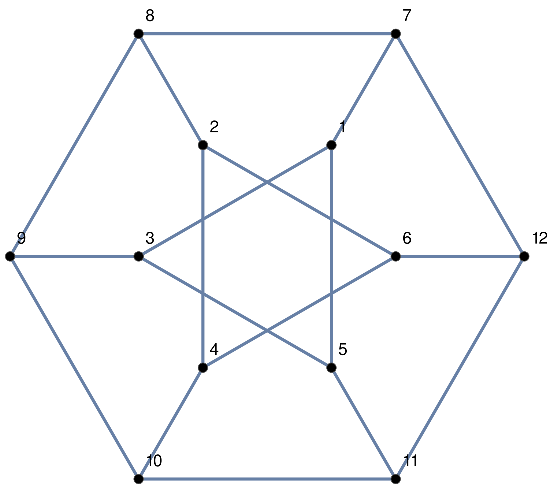
(e) Donner un exemple de graphe G qui n'est ni hamiltonien, ni eulérien et pour lequel $L(G)$ est hamiltonien.

(2) (5 points) On considère les 4 graphes ci-dessous.



(a) Parmi ces graphes, lesquels sont eulériens ? Justifier.
(b) Parmi ces graphes, lesquels sont hamiltoniens ? Justifier.
(c) Pour chaque graphe, combien de couleurs sont nécessaires pour avoir un coloriage propre des sommets ?
(d) Retirer un nombre minimum d'arêtes à H pour en faire un arbre.

(3) (5 points) On considère le *graphe de Dürer* représenté ci-dessous



(a) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
(b) Prouver que cette matrice M est primitive (*Suggestion* : il n'est pas nécessaire d'en calculer explicitement des puissances).
(c) Sans faire le calcul, pourquoi les éléments diagonaux de M^2 sont-ils tous égaux à 3 ?
(d) Même question avec M^3, pourquoi ses éléments diagonaux sont-ils égaux soit à 2, soit à 0 ?
(e) Sachant que le diamètre du graphe vaut 4 (i.e., la distance entre deux sommets quelconques est au plus 4 et il existe deux sommets dont la distance est exactement 4), quel renseignement pouvez-vous tirer sur les puissances de M ?

(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 80 faces triangulaires et 12 faces pentagonales. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face pentagonale. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G. Justifier votre raisonnement.