Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mercredi 17 janvier 2018

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Soient E un $\mathbb{K}$-vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Définir la somme de F et de G. Enoncer et <u>démontrer</u> la formule donnant $\dim(F+G)$.

2) Quand dit-on qu'un système d'équations linéaires est de Cramer ? Enoncer et <u>démontrer</u> les formules de Cramer ?

3) <u>Définir</u> les notions de permutation, cycle, transposition et signature d'une permutation.

4) <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. L'ensemble $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel, est un espace vectoriel de dimension finie.

b. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel E. Le sous-espace G est un supplémentaire de F dans E si et seulement si tout élément de E possède une unique décomposition comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

c. Si $x_1, \ldots, x_k$ sont des éléments linéairement indépendants de $\mathbb{C}^n$ considéré comme $\mathbb{C}$-vectoriel, alors $x_1, \ldots, x_k$ sont encore linéairement indépendants quand $\mathbb{C}^n$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.

d. Soit $A \in \mathbb{R}^3_3$ une matrice. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Ax$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si A est inversible.

e. Toute permutation est son propre inverse.

Consignes : La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

5) Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} b & b & b-a & b-a \\ a-b & -b & a & a \\ a+b & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6)

a) Donner un exemple de deux matrices symétriques (carrées de même dimension) dont le produit n'est pas une matrice symétrique. (*Suggestion* : des matrices contenant uniquement des 0 et des 1 suffisent.)

b) Soient $A, B \in \mathbb{R}^n_n$ deux matrices symétriques.
Prouver que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

7) Soit $F \subset \mathbb{R}^4$ l'ensemble des solutions du système homogène suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_2 - x_3 + \lambda\, x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

a. En fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, donner une base et déterminer la dimension de F.

b. Si $\lambda = 2$, donner une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

c. Si $\lambda = 2$, déterminer l'intersection de F avec

$$G = \Bigg\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\langle$$

d. Si $\lambda = 1$, quelle est la dimension de $F + G$ avec

$$G = \Bigg\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\langle$$