**Examen écrit de théorie des graphes**

Janvier 2017

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

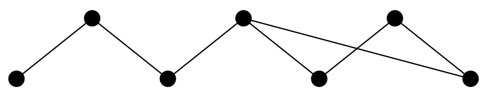
Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

(1) Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe orienté soit eulérien.

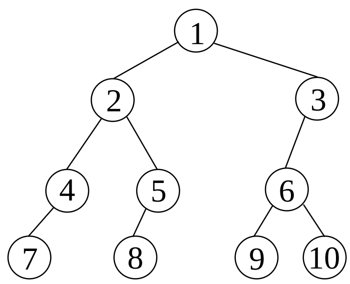
(2) Enoncer le théorème de Dirac donnant une condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien.

(3) Soit le graphe $G$ représenté ci-dessous.



Sachant que $\sqrt{2} \simeq 1,41$ ; $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)} \simeq 2,19$ et $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)} \simeq 0,46$ sont valeurs propres de $G$, quelles sont les autres valeurs propres de $G$ ? La matrice d'adjacence de $G$ est-elle primitive ? Justifier vos réponses.

(4) Soit l'arbre représenté ci-dessous. Fournir les parcours préfixe, infixe et suffixe des sommets.




Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points) Soit $G$ un graphe simple ayant $n$ sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. (On suppose qu'un sommet isolé est un arbre "trivial".)

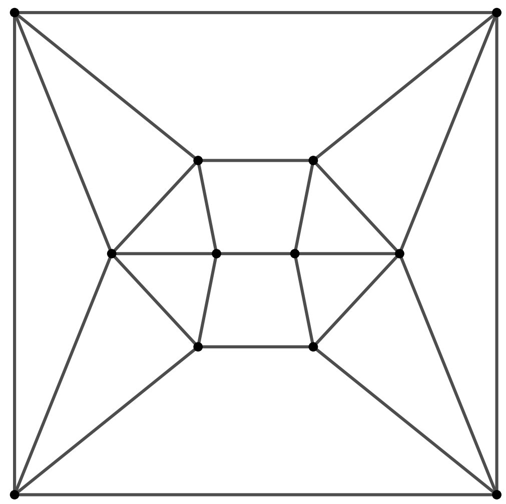
(a) Prouver que $G$ n'est pas connexe.

(b) Prouver que $G$ possède une composante connexe qui est un arbre.

(c) Prouver que $G$ possède une composante connexe qui n'est pas un arbre.

(d) Prouver que si $G$ possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

(2) (5 points) Soit le graphe $G$ à 12 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que $G$ est un graphe 4-colorable qui n'est pas 3-colorable.
(d) Ajouter au plus 3 arêtes au graphe pour qu'il ne soit plus planaire.
(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de $G$. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces cette représentation planaire de $G$, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

(3) (5 points) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté $D$ ayant $M$ comme matrice d'adjacence.
(b) Prouver que la matrice $M$ est primitive. Est-il possible de supprimer un unique arc au graphe $D$ pour rendre la matrice correspondante irréductible mais non primitive ?
(c) Soit $\alpha$ la valeur propre de Perron de $M$. Quels renseignements peut-on tirer de $M^n$ quand $n$ tend vers l'infini ? (Un énoncé théorique suffit pour répondre à la question.)
(d) En supposant les sommets de $D$ numérotés de façon compatible avec $M$, montrer que, pour tout $n \geq 4$, le nombre de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n + 4$ est égal à la somme des nombres de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n$ et ceux de longueur $n+1$. En déduire le nombre de tels chemins fermés de longueur 16 passant par 1.

(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe $G$ ayant 32 faces triangulaires et 6 faces carrées. De chaque sommet de $G$ partent quatre faces triangulaires et une face carrée. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de $G$.