Examen écrit de théorie des graphes
Janvier 2017

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

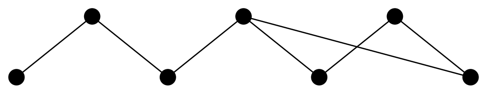
Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

(1) Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe orienté soit eulérien.

(2) Enoncer le théorème de Dirac donnant une condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien.

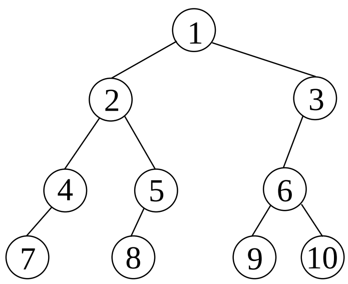
(3) Soit le graphe G représenté ci-dessous.



Sachant que $\sqrt{2} \simeq 1,41$; $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)} \simeq 2,19$ et $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)} \simeq 0,46$ sont valeurs propres de G, quelles sont les autres valeurs propres de G ? La matrice d'adjacence de G est-elle primitive ? Justifier vos réponses.

Solution : On remarque que le graphe G est biparti (une partition des sommets est donnée par l'ensemble des 3 sommets du haut et par l'ensemble des 4 sommets du bas). Donc, son spectre est symétrique par rapport à zéro (résultat théorique du cours). On en conclut que $-\sqrt{2} \simeq -1,41$; $-\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)} \simeq -2,19$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)} \simeq -0,46$ sont aussi des valeurs propres de G. De plus, G possèdant 7 sommets, zéro est également valeur propre de G. La matrice d'adjacence ne peut pas être primitive. Si elle l'était, le théorème de Perron stipule qu'elle devrait posséder une unique valeur propre réelle de module maximum. Cependant, $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)}$ ont un module maximum (identique). Un autre argument consisterait à remarquer qu'il n'existe aucun chemin de longueur impaire du sommet en bas à gauche vers lui même (ceci contredit la définition d'une matrice primitive).

(4) Soit l'arbre représenté ci-dessous. Fournir les parcours préfixe, infixe et suffixe des sommets.



- préfixe : 1, 2, 4, 7, 5, 8, 3, 6, 9, 10
- infixe : 7, 4, 2, 8, 5, 1, 9, 6, 10, 3
- suffixe : 7, 4, 8, 5, 2, 9, 10, 6, 3, 1

Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points) Soit G un graphe simple ayant n sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. (On suppose qu'un sommet isolé est un arbre "trivial".)
   (a) Prouver que G n'est pas connexe.
   (b) Prouver que G possède une composante connexe qui est un arbre.
   (c) Prouver que G possède une composante connexe qui n'est pas un arbre.
   (d) Prouver que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

   Solution : Commençons par deux rappels. On sait qu'un *arbre* ayant s sommets possède exactement $s-1$ arêtes. On sait aussi qu'un graphe connexe possède un sous-arbre couvrant. En particulier, un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.
   (a) On procède par l'absurde. Supposons que G soit connexe. Alors, G possède un sous-arbre couvrant ayant $n-1$ arêtes. Mais G possède exactement $n-1$ arêtes. Donc, G coincïde avec cet arbre couvrant. Ceci est absurde car, par hypothèse, G n'est pas un arbre.
   (b) Soit t le nombre de composantes connexes de G. On sait déjà que $t \geq 2$. Soient $n_1, \ldots, n_t$, les nombres de sommets appartenant respectivement aux différentes composantes connexes. On a $n = n_1 + \cdots + n_t$.
   Pour répondre à la question, supposons qu'aucune composante n'est un arbre (on procède par l'absurde). Ainsi, pour tout i, la i-ième composante contient au moins n_i arêtes (s'il s'agissait d'un arbre, on en aurait $n_i - 1$). Le nombre total d'arêtes $n-1$ est la somme des nombres d'arêtes des différentes composantes. On en tire

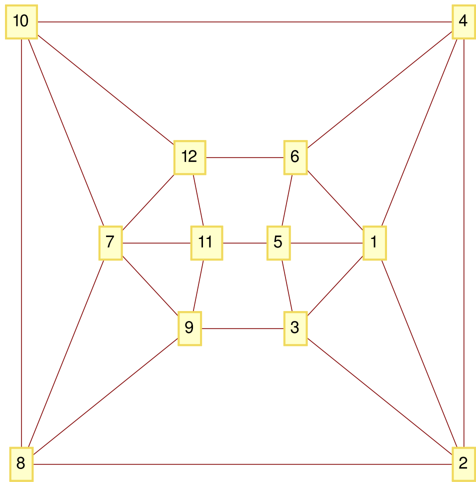
$$n - 1 \geq n_1 + \cdots + n_t = n$$

   qui est absurde. Autrement dit, au moins une des composantes est un arbre.
   (c) On procède de la même manière. Supposons que chaque composante est un arbre. Ainsi, la i-ième composante contient exactement $n_i - 1$ arêtes. Le nombre total d'arêtes est donc

$$n - 1 = n_1 - 1 + \cdots + n_t - 1 = n - t.$$

   Ceci signifie que $t = 1$ (encore une absurdité). Autrement dit, au moins une des composantes n'est pas un arbre.
   (d) Ici, $t = 2$. Si la première composante est un arbre, le nombre d'arête de cette composante vaut $n_1 - 1$. Puisque $n_1 + n_2 = n$ et que le nombre total d'arêtes vaut $n-1$. On en tire que la seconde composante (qui n'est pas un arbre) contient exactement n_2 arêtes (et n_2 sommets). Autrement dit, cette composante est un arbre auquel on a ajouté une arête entre deux sommets. L'adjonction de cette arête ferme un cycle. (Si on crée plus d'un cycle, alors la composante sans cette arête ajoutée devrait déjà contenir un cycle. Ceci est impossible dans un arbre.)

(2) (5 points) Soit le graphe G à 12 sommets représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ? Quelle est sa fermeture ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que G est un graphe 4-colorable qui n'est pas 3-colorable.
(d) Ajouter au plus 3 arêtes au graphe pour qu'il ne soit plus planaire.
(e) Représenter le dual de cette représentation planaire de G. Quel est le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorer les faces cette représentation planaire de G, des faces adjacentes recevant des couleurs distinctes ?

Solution :

(a) Il est hamiltonien, considérer (par exemple) le circuit passant par les sommets

$$10, 4, 2, 1, 6, 5, 3, 9, 11, 12, 7, 8, 10.$$

Le graphe possède 12 sommets de degré 4 ou 5. Ainsi, la somme des degrés de 2 sommets n'est jamais supérieure ou égale à 12. On en conclut que le graphe est égal à sa fermeture (revoir la définition de fermeture).

(b) Rappel (cours théorique) : un graphe est eulérien si et seulement si chaque sommet est de degré pair. Donc, ce graphe n'est pas eulérien.

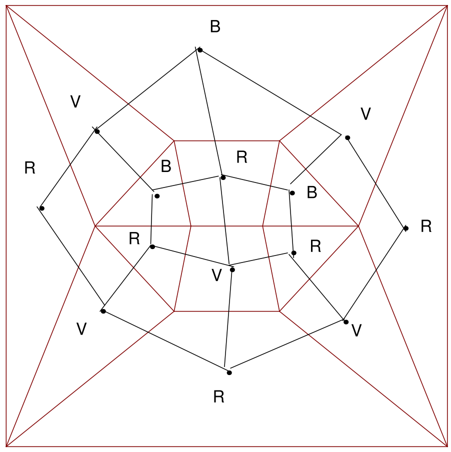
(c) On peut grouper les sommets comme suit (une couleur différente par sous-ensemble)

$$\{1, 8, 12\}, \ \{4, 7\}, \ \{2, 5, 9, 10\}, \ \{3, 6, 11\}.$$

De cette façon, des sommets voisins reçoivent des couleurs distinctes. Il ne peut pas être coloré avec trois couleurs. En effet, les sommets 7, 8 et 10 doivent recevoir des couleurs différentes (K_3). Si on ne dispose que de 3 couleurs, alors 8 et 12 ont la même couleur, de même pour 9 et 10. On en conclut que $7, 9, 12$ sont colorés avec les 3 couleurs distinctes. Il ne reste pas de couleur disponible pour 11.

(d) Le théorème de Kuratowski (résultat énoncé au cours théorique) stipule qu'un graphe contenant une copie de K_5 n'est pas planaire. Si on ajoute les arêtes $\{9, 12\}$, $\{9, 11\}$ et $\{10, 11\}$, on retrouve une copie de K_5 avec les 5 sommets $7, 9, 10, 11, 12$.

(e) Voici le dual (les faces de G deviennent les sommets du dual et deux sommets sont adjacents si les faces initiales ont une arête commune). Il est donc équivalent de colorier les faces de la représentation planaire de G ou les sommets du dual.



On peut essayer de colorer les sommets du dual avec deux couleurs. Le cycle "extérieur" formé de huit sommets. Ceux-ci sont colorés de façon alternée. Cela induit un coloriage incompatible pour le cycle "intérieur" formé de six sommets. Par contre, on trouve facilement un coloriage avec 3 couleurs (comme indiqué sur la figure).

(3) (5 points) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.

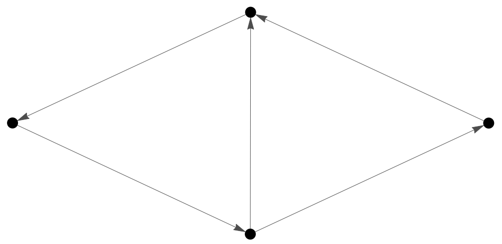
(b) Prouver que la matrice M est primitive. Est-il possible de supprimer un unique arc au graphe D pour rendre la matrice correspondante irréductible mais non primitive ?

(c) Soit α la valeur propre de Perron de M. Quels renseignements peut-on tirer de M^n quand n tend vers l'infini ? (Un énoncé théorique suffit pour répondre à la question.)

(d) En supposant les sommets de D numérotés de façon compatible avec M, montrer que, pour tout $n \geq 4$, le nombre de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur $n + 4$ est égal à la somme des nombres de chemins fermés partant et arrivant en 1 de longueur n et ceux de longueur $n+1$. En déduire le nombre de tels chemins fermés de longueur 16 passant par 1.

Solution :

(a) Voici une représentation du graphe (le sommet 1 se trouve en bas, 2 à droite, 3 en haut et 4 à gauche) :



(b) Il y a plusieurs façons de répondre à cette question. Par exemple, le sommet du bas (1) appartient à un cycle de longueur 3 et un cycle de longueur 4. Le pgcd de ces longueurs vaut 1, donc, la période du graphe (connexe) vaut 1 (ce qui signifie que la matrice est primitive). Une alternative est de calculer M^{10} et d'observer que tous les éléments sont > 0. Sur la représentation du graphe donnée ci-dessus, il suffit de supprimer l'arc vertical. Le graphe est alors réduit à un unique cycle de longueur 4 (la matrice correspondante est irréductible de période 4).

(c) On sait que M^n/α^n converge, pour $n \to +\infty$, vers une matrice constante dont tous les éléments sont > 0.

(d) Notons $c_{u\to v}(n)$ le nombre de chemins de longueur n joignant u à v. Puisque du sommet 1 partent deux arcs, l'un vers 2, l'autre vers 3, on en tire que

$$c_{1\to 1}(n+4) = c_{2\to 1}(n+3) + c_{3\to 1}(n+3).$$

Vu la forme du graphe, on trouve

$$c_{2\to 1}(n+3) = c_{3\to 1}(n+2) = c_{4\to 1}(n+1) = c_{1\to 1}(n)$$

et, pour conclure,

$$c_{3\to 1}(n+3) = c_{4\to 1}(n+2) = c_{1\to 1}(n+1).$$

Avec la présence des deux cycles, on s'aperçoit que les 4 premières valeurs de la suite $(c_{1\to 1}(n))_{n\geq 1}$ sont $0, 0, 1, 1$. On peut alors utiliser la relation de récurrence

$$c_{1\to 1}(n+4) = c_{1\to 1}(n) + c_{1\to 1}(n+1)$$

pour calculer les termes suivants de la suite $(c_{1\to 1}(n))_{n\geq 1}$

$$0, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 2, 4, 6, 5, 6$$

et ainsi trouver $c_{1\to 1}(16) = 6$.

(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant 32 faces triangulaires et 6 faces carrées. De chaque sommet de G partent quatre faces triangulaires et une face carrée. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.

Solution : on utilise les notations habituelles s, a, f. Etant dans les conditions pour appliquer la formule d'Euler, on sait que $s - a + f = 2$ et ici, $f = 38$. Notons f_C (resp. f_T) le nombre de faces carrées (resp. triangulaires). Si on passe en revue les sommets pour compter les faces, chaque sommet appartenant à 5 faces et chaque face comprenant 4 ou 3 sommets, on a

$$5s = 4f_C + 3f_T = 24 + 96 = 120$$

donc, $s = 24$ et on en tire $a = s + f - 2 = 60$.