# Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mardi 17 janvier 2017

**Consignes** : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

**1)** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Qu'appelle-t-on *formule de changement de bases* ? Introduire le contexte et les notations utilisées. Démontrer cette formule. En expliquer l'utilité.

**2)** Le *permanent* d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}_n^n$ est défini comme

$$per(A) = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1}\, a_{\nu(2),2} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

Démontrer que

a. le permanent est une application multi-linéaire par rapport aux colonnes;
b. le permanent de l'identité vaut 1;
c. le permanent est symétrique par rapport aux colonnes :

$$\forall \mu \in \mathcal{S}_n : \quad per\begin{pmatrix} C_{\mu(1)} & \cdots & C_{\mu(n)} \end{pmatrix} = per\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix};$$

d. pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$per(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, P_{i,j}$$

où $P_{i,j}$ est le permanent de la matrice $A$ privée de sa $i$-ième ligne et de sa $j$-ième colonne.

**3)** Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soit $p \geq 1$ un entier. Si les éléments $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ d'un espace vectoriel sont linéairement dépendants, alors $x_1, \ldots, x_p$ le sont aussi.
b. Soient $p, n$ deux entiers tels que $1 \leq p < n$. L'ensemble des solutions d'un système de $p$ équations linéaires à $n$ inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
c. Soient $A, B \in \mathbb{C}_3^3$. Si $A.B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
d. Soient $r \in ]0,1[$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$ deux réels. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto r\, z\, e^{i\alpha}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
e. Soit la permutation

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 8 & 1 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\nu^n = id$ si et seulement si $n$ est un multiple de 30.

**Consignes** : La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

**4)** A quelle(s) condition(s) sur le paramètre complexe $\lambda$ les vecteurs colonnes du $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}^4$ donnés ci-dessous sont-ils linéairement indépendants?

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\lambda\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}.$$

**5)** Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice suivante est-elle inversible et, le cas échéant, calculer son inverse

$$T = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(x) & \sin(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(x) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(2x) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(x) & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

**6)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On considère le sous-espace vectoriel $F_{a,b}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} b & b & b-a & b-a \\ a-b & -b & a & a \\ a+b & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

a. Déterminer la dimension de $F_{a,b}$ en fonction de $a$ et $b$.
b. Donner une base de $F_{0,1}$ et donner une expression générale caractérisant les éléments de $F_{0,1}$.
c. Déterminer, grâce aux points précédents, la dimension de $F_{2,1} + F_{0,1}$.
d. Montrer que

$$\mathbb{R}^4 = F_{0,1} \oplus \rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \langle$$