Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mardi 17 janvier 2017

Consignes : Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes.
La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Qu'appelle-t-on *formule de changement de bases* ? Introduire le contexte et les notations utilisées. Démontrer cette formule. En expliquer l'utilité.

2) Le *permanent* d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^n_n$ est défini comme

$$per(A) = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1}\, a_{\nu(2),2} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

Démontrer que

a. le permanent est une application multi-linéaire par rapport aux colonnes;

Soient $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{K}^n$ des vecteurs colonnes et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K} \in \mathbb{K}$ des scalaires. Calculons le permanent de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

où la j-ième colonne est donnée par

$$C_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, X_k.$$

Par définition, ce permanent vaut

$$\sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1} \cdots \left[\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, X_k\right]_{\nu(j)} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

où l'élément entre crochets signifie que l'on considère la composante $\nu(j)$ d'un vecteur colonne. Puisque la $\nu(j)$-ième composante d'une combinaison linéaire est égale à la combinaison correspondante des $\nu(j)$-ièmes composantes,

$$per(A) = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1} \cdots \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, [X_k]_{\nu(j)} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} per(A) &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1} \cdots [X_k]_{\nu(j)} \cdots a_{\nu(n),n} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, per \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & X_k & \cdots & C_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec X_k comme j-ième colonne. Ceci prouve la multi-linéarité du permanent par rapport aux colonnes (preuve identique à celle du déterminant).

b. le permanent de l'identité vaut 1;

Par définition,

$$per(I) = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} I_{\nu(1),1}\, I_{\nu(2),2} \cdots I_{\nu(n),n}.$$

Pour tout i, si $\nu(i) \neq i$, alors $I_{\nu(i),i} = \delta_{\nu(i),i} = 0$. Ainsi, des $n!$ termes composant la somme, un seul est non nul : celui pour lequel $\nu(i) = i$ pour tout i. Ce terme vaut 1. (Preuve identique à celle du déterminant.)

c. le permanent est symétrique par rapport aux colonnes :

$$\forall \mu \in \mathcal{S}_n : \quad per\begin{pmatrix} C_{\mu(1)} & \cdots & C_{\mu(n)} \end{pmatrix} = per\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix};$$

Puisque toute permutation est un produit de transpositions, on peut se limiter à vérifier la propriété pour les transpositions. Mis à part des écritures plus lourdes d'indices dans le cas général, nous allons nous limiter à la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ceci ne modifie en rien les arguments utilisés. Par définition,

$$per\begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),2}\, a_{\nu(2),1}\, a_{\nu(3),3} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

Pour conclure, il faut principalement se rendre compte que la somme définissant le permanent revient, de toutes les façons possibles, à sélectionner dans chaque colonne un unique élément en veillant, dans chaque terme, à prendre exactement un élément par ligne. Formellement, on peut procéder comme suit.

Soit τ, la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'application $\nu \mapsto \nu\tau$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même (l'argument a été utilisé, par exemple, dans la preuve montrant que, dans $\mathcal{S}_n$, le nombre de permutations paires est égal au nombre de permutations impaires). Autrement dit, l'ensemble $S = \{\nu\tau : \nu \in \mathcal{S}_n\}$ est $\mathcal{S}_n$. "On passe donc bien en revue toutes les permutations quand on énumère les éléments de S." Il vient

$$per\begin{pmatrix} C_2 & C_1 & C_3 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu\tau(1),2}\, a_{\nu\tau(2),1}\, a_{\nu\tau(3),3} \cdots a_{\nu\tau(n),n}.$$

Pour conclure, vu la définition de τ, $\nu\tau(1) = \nu(2)$, $\nu\tau(2) = \nu(1)$ et $\nu\tau(j) = \nu(j)$ pour tout $j \geq 3$. Ainsi, on retrouve bien le permanent de $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$.

d. pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$per(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, P_{i,j}$$

où $P_{i,j}$ est le permanent de la matrice A privée de sa i-ième ligne et de sa j-ième colonne.

Encore une fois, sans perte de généralité, supposons $j = 1$. Par définition,

$$per(A) = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1}\, a_{\nu(2),2} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

Pour i fixé dans $\{1,\ldots,n\}$, il y a exactement $(n-1)!$ permutations ν telles que $\nu(1)=i$. Autrement dit, on a

$$per(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \overbrace{\sum_{\substack{\nu\in\mathcal{S}_n \\ \nu(1)=i}} a_{\nu(2),2}\cdots a_{\nu(n),n}}^{t_i}.$$

Il reste à se convaincre que $t_i = P_{i,1}$. Dans t_i, on somme sur toutes les bijections de $\{2,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}$ et toutes les colonnes, sauf la première, interviennent. Par définition, il s'agit bien du permanent de la matrice privée de sa première colonne et de sa i-ième ligne.

3) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soit $p\geq 1$ un entier. Si les éléments $x_1,\ldots,x_p,x_{p+1}$ d'un espace vectoriel sont linéairement dépendants, alors $x_1,\ldots,x_p$ le sont aussi.

FAUX. Un contre-exemple suffit. Par exemple, avec $p=2$, les éléments $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants ($x_1+x_2-x_3=0$). Cependant, x_1,x_2 sont linéairement indépendants.

Remarques : Encore plus simple avec $p=1$. Les éléments $1,2$ de $\mathbb{R}$ sont linéairement dépendants mais 1 seul est linéairement indépendant. D'un point de vue logique, on aurait aussi pu montrer que l'assertion "si $x_1,\ldots,x_p$ sont linéairement indépendants, alors $x_1,\ldots,x_p,x_{p+1}$ le sont aussi" est fausse (en fournissant un contre-exemple).

b. Soient p,n deux entiers tels que $1\leq p<n$. L'ensemble des solutions d'un système de p équations linéaires à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

FAUX. Un contre-exemple suffit. Avec $p=1$ et $n=2$, on considère le système d'une équation à deux inconnues: $x+y=1$. L'ensemble des solutions est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^2$ ne contenant pas 0. Il ne s'agit donc pas d'un sous-espace vectoriel.

Remarque : il était donc important de bien faire la distinction entre le cas des systèmes homogènes ou non homogènes.

c. Soient $A,B\in\mathbb{C}_3^3$. Si $A.B=0$, alors $A=0$ ou $B=0$.

FAUX. Un contre-exemple suffit. Soient

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont non nulles mais $A.B=0$.

d. Soient $r \in]0,1[$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$ deux réels. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto r\, z\, e^{i\alpha}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

VRAI. L'application est injective. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = f(z')$. Ainsi, $r\, z\, e^{i\alpha} = r\, z'\, e^{i\alpha}$. Puisque r est non nul, en multipliant les deux membres par $\frac{1}{r}\, e^{-i\alpha}$, on en déduit que $z = z'$.

L'application est surjective. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $y = \frac{z}{r}\, e^{-i\alpha}$ est tel que $f(y) = z$.

Remarque : il était important de bien se rappeler les définitions d'injection et de surjection.

e. Soit la permutation

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 8 & 1 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\nu^n = id$ si et seulement si n est un multiple de 30.

VRAI. Sachant que toute permutation est un produit de cycles disjoints, on trouve $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. Ainsi ν est le produit de trois cycles de longueur respective 2, 3 et 5.

Si μ est un cycle de longueur k, le plus petit entier $n > 0$ tel que $\mu^n = id$ est k. En conséquence, $\mu^\ell = id$ si et seulement si ℓ est un multiple de k. Donc les seules puissances n telles que $\nu^n = id$ sont les multiples du pgcd de $2, 3$ et 5, à savoir 30.

4) A quelle(s) condition(s) sur le paramètre complexe λ les vecteurs colonnes du $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}^4$ donnés ci-dessous sont-ils linéairement indépendants?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on est en présence de 4 éléments de $\mathbb{C}^4$, il suffit de calculer le déterminant de la matrice 4×4 correspondante (cela évite des développements fastidieux). *Les vecteurs colonnes de cette matrice sont linéairement indépendants si et seulement si son déterminant est non nul.* En utilisant la règle des mineurs selon la deuxième ligne, on trouve aisément que ce déterminant vaut

$$-\lambda^3 - 2.$$

Puisque λ est un nombre complexe, l'équation $\lambda^3 = -2$ possède trois solutions (les racines cubiques de -2). En conclusion, les vecteurs colonnes sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\lambda \notin \{-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi/3},\ \sqrt[3]{2}\, e^{5i\pi/3}\}.$$

Remarques : Débuter l'exercice en considérant une combinaison linéaire arbitraire des quatre vecteurs est bien plus long. Aussi, il faut savoir qu'un nombre complexe z possède n racines n-ièmes, i.e., il existe $w_1, \ldots, w_n$ distincts tels que $w_i^n = z$.

5) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice suivante est-elle inversible et, le cas échéant, calculer son inverse

$$T = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(x) & \sin(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(x) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(2x) & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \sin(x) & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on est en présence d'une matrice diagonale par blocs, il suffit de considérer séparemment les deux blocs diagonaux. Le déterminant de T est le produit des déterminants des blocs diagonaux. On a

$$\det \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix} = 1$$

et

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \sin(x) & 2 \\ 1 & \sin(2x) & 1 \\ 1 & \sin(x) & \sin(x) \end{pmatrix} = [\sin(x) - 2]\,[\sin(2x) - \sin(x)] = D.$$

Pour calculer ce dernier déterminant, on pouvait commencer par remplacer L_3 par $L_3 - L_1$. Ainsi,

$$\det T = [\sin(x) - 2]\,[\sin(2x) - \sin(x)]$$

et T est inversible si et seulement $\det T \neq 0$; autrement dit, si $D \neq 0$. Bien évidemment, $\sin(x) - 2$ ne s'annule jamais. Ainsi, T est inversible si et seulement $\sin(2x) - \sin(x) \neq 0$ ou encore, si

$$\sin(x)\,[2\cos(x) - 1] \neq 0.$$

Or $\sin(x) = 0$ si et seulement si $x \in A = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\cos(x) = 1/2$ si et seulement si $x \in B = \{\pi/3 + 2k\pi, -\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. En conclusion T est inversible si et seulement si $x \notin A \cup B$.

Lorsque T est inversible, il suffit de calculer séparemment les inverses des deux blocs diagonaux (cela revient principalement à calculer la matrice des cofacteurs transposée). Pour le premier, son inverse est donné par

$$\begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}$$

et pour le second, on trouve

$$\frac{1}{D} \begin{pmatrix} \sin(x)\,[\sin(2x) - 1] & [2 - \sin(x)]\,\sin(x) & \sin(x) - 2\sin(2x) \\ 1 - \sin(x) & \sin(x) - 2 & 1 \\ \sin(x) - \sin(2x) & 0 & \sin(2x) - \sin(x) \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse recherchée est une matrice diagonale par blocs donc les deux blocs diagonaux sont donnés ci-dessus.

6) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On considère le sous-espace vectoriel $F_{a,b}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} b & b & b-a & b-a \\ a-b & -b & a & a \\ a+b & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a. Déterminer la dimension de $F_{a,b}$ en fonction de a et b.

On est en présence d'un système homogène. L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel dont *la dimension est donnée par le nombre d'inconnues moins le rang du système* (cf. Rem. VI.4.1). On est donc ramené à étudier le rang de la matrice du système en fonction des paramètres a et b. *Le rang d'une matrice ne change pas si on remplace une rangée par elle-meme plus une combinaison linéaire d'autres rangées.* Dit autrement, cela revient à considérer un système équivalent au système définissant $F_{a,b}$. Ainsi, on peut étudier le rang de la matrice suivante (dans l'ordre, on a remplacé $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis, $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & b \\ 2a & 0 & a & a \\ a+b & b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en effectuant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & b \\ 2a & 0 & a & a \\ a & b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a = b = 0$, la matrice est de rang nul, $\dim F_{0,0} = 4$.
Si $a = 0$ et $b \neq 0$, la matrice est de rang 2 et $\dim F_{0,b} = 4 - 2 = 2$.
Si $a \neq 0$ et $b = 0$, la matrice est de rang 2 et $\dim F_{a,0} = 4 - 2 = 2$.
Enfin, si a et b sont non nuls, la sous-matrice 2×2 du coin inférieur gauche a $2ab$ pour déterminant. Le rang de la matrice vaut donc au moins 2. Vu la règle des sous-matrices bordées, il vaut 3 si et seulement

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2a & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = -b(a^2 - 2ab) \neq 0$$

(sinon, il vaut 2). Ainsi, le rang vaut 3 et donc $\dim F_{a,b} = 1$ si et seulement si $a \neq 2b$ (et $ab \neq 0$). Si $a = 2b \neq 0$, alors $\dim F_{a,b} = 2$.

b. Donner une base de $F_{0,1}$ et donner une expression générale caractérisant les éléments de $F_{0,1}$. Par définition, on a

$$F_{0,1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

En présence d'un système compatible, *on obtient un système équivalent en conservant des équations indépendantes en nombre égal au rang du système* (ici 2). En ne conservant que les deux premières équations et en remplaçant la première équation par la somme des deux, on en tire que les éléments de $F_{0,1}$ vérifient $x_2 = -x_1$ et $x_4 = -x_3$ (système équivalent). Ainsi,

$$F_{0,1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

et une base (les éléments forment visiblement une partie libre et génératrice de $F_{0,1}$) est donnée par les éléments

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c. Déterminer, grâce aux points précédents, la dimension de $F_{2,1} + F_{0,1}$.

On sait que $\dim(F_{2,1}+F_{0,1}) = \dim F_{2,1} + \dim F_{0,1} - \dim(F_{2,1} \cap F_{0,1})$. De plus, $\dim F_{2,1} = 2$ et $\dim F_{0,1} = 2$. En outre, $\dim(F_{2,1}+F_{0,1}) \leq 4$. Ainsi, on demande essentiellement de caractériser l'intersection $F_{2,1} \cap F_{0,1}$.

Au point précédent, nous avons caractérisé les éléments de $F_{0,1}$. On peut alors vérifier quels éléments de $F_{0,1}$ (autres que 0) appartiennent à $F_{2,1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

On en tire que $F_{2,1} \cap F_{0,1}$ est un sous-espace de dimension 1. En effet, nous venons de montrer que

$$F_{2,1} \cap F_{0,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle.$$

Donc, $\dim(F_{2,1} + F_{0,1}) = 2 + 2 - 1 = 3$.

d. Montrer que

$$\mathbb{R}^4 = F_{0,1} \oplus \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle$$

On sait déjà que $\dim F_{0,1} = 2$. On est en présence de deux sous-espaces de dimension 2. Il suffit alors de vérifier que leur intersection est réduite à $\{0\}$. Puisqu'on dispose d'une base de $F_{0,1}$, un argument rapide consiste à vérifier que les 4 vecteurs suivants sont linéairement indépendants (calcul immédiat de déterminant, même argument que pour la question **4**)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, aucune combinaison linéaire des deux premiers vecteurs (c'est-à-dire un élément de $F_{0,1}$) ne peut être égale à une combinaison linéaire des deux derniers (un élément du second sous-espace); sauf si les coefficients de ces deux combinaisons sont tous nuls.