Examen écrit de théorie des graphes

Janvier 2016

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

Bon travail !

Théorie (**uniquement** pour les étudiants ayant passé le projet)

(1) Enoncer et démontrer le théorème de Dirac donnant une condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien.

(2) Définir la notion de matrice primitive et donner deux des points énoncés dans le théorème de Perron.

(3) Définir la notion de tri topologique d'un graphe orienté.

(4) Donner un exemple de graphe non planaire

Exercices (**pour tous**)

(1) (5 points) Un *tournoi* est un graphe simple et orienté $G = (V, E)$ tel que pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets distincts, exactement l'un des deux arcs (u, v) ou (v, u) appartient à E. Un tournoi est *transitif* si, pour tous sommets u, v, w, si $(u, v) \in E$ et $(v, w) \in E$, alors $(u, w) \in E$. Un *roi* d'un tournoi est sommet r à partir duquel on peut atteindre tout autre sommet de V par un chemin de longueur au plus 2.

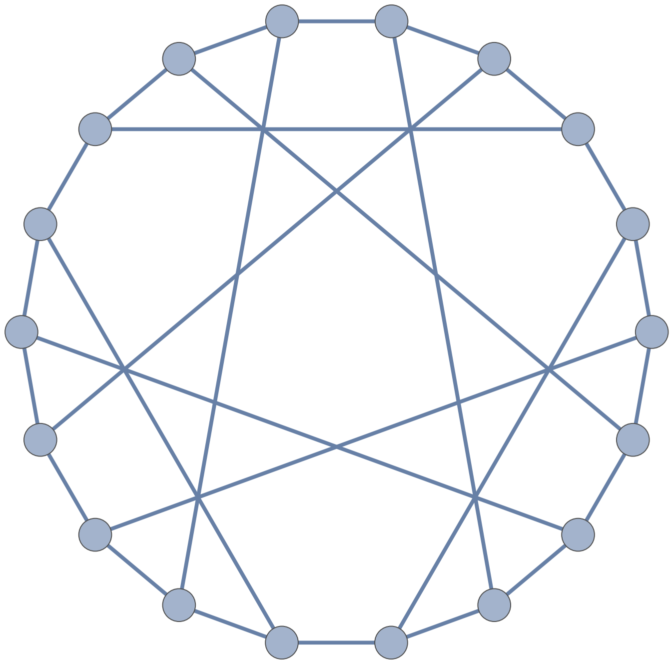
(a) Donner un exemple de tournoi transitif et un exemple de tournoi non transitif, tous deux avec 4 sommets. Dans chaque cas, exhiber un roi du tournoi.

(b) Soit v un sommet d'un tournoi $G = (V, E)$. Comparer $d^+(v) + d^-(v)$ et $\#V$.

(c) Démontrer qu'un tournoi est transitif si et seulement s'il est sans cycle.

(d) Démontrer qu'un tournoi possède au moins un roi (indice : considérer un sommet r de demi-degré sortant maximum et les ensembles $\mathrm{succ}(r)$ et $\mathrm{pred}(r)$).

(2) (5 points) Soit le *graphe de Pappus* G représenté ci-dessous.



(a) Ce graphe est-il hamiltonien ?
(b) Ce graphe est-il eulérien ?
(c) Montrer que G est un graphe 2-colorable. En déduire que G est biparti.
(d) Montrer, sans calcul, que 3 est valeur propre et que 4 n'est pas valeur propre de G.

(3) (5 points) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
(b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe D.
(c) Prouver que la matrice M n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible d'ajouter un unique arc au graphe D pour rendre la matrice correspondante irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive.
(d) En supposant les sommet de D numérotés de façon compatible avec M, montrer que, pour tout n, les nombres de chemins de longueur n joignant 3 à 2, 4 à 3, 2 à 4 sont égaux. (Bonus : montrer que cette quantité est aussi égale au nombre de chemins de longueur n joignant 2 à 1.)

(4) (5 points) On considère un graphe planaire connexe G ayant huit faces triangulaires et dix-huit faces carrées. De chaque sommet de G partent une face triangulaire et trois faces carrées. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.