Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 4 janvier 2016

Consignes : Répondez à des questions différentes sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

1) Soient $x_1, \dots, x_p$ des éléments de $\mathbb{K}^n$, avec $p < n$. Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante (en termes de mineurs) pour que ces éléments soient linéairement dépendants.

2) Soient A, B deux matrices carrées de même dimension. Démontrer que

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

On suppose *connue* (il suffit de l'énoncer) la propriété caractérisant les applications multilinéaires et alternées sur les colonnes.

3) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soient $A, B \in \mathbb{R}_3^3$. Si $\det(A) = \det(B) = 0$, alors $\det(A + B) = 0$.

b. Si le rang d'une matrice A vaut r, alors r colonnes quelconques de A sont toujours linéairement indépendantes.

c. Soient $x_1, \dots, x_k$ des éléments d'un $\mathbb{K}$-vectoriel. Puisque la combinaison linéaire

$$0.x_1 + \cdots + 0.x_k$$

est nulle, on en déduit que $x_1, \dots, x_k$ sont linéairement indépendants.

d. Soient x, y deux élements distincts d'un espace vectoriel. On n'a jamais $\rangle x, y\langle = \rangle x \langle$.

e. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On définit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $f(2x) = 2x$ et

$$f(2x+1) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } 2x+3 \leq n; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application f est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

4) Calculer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & \alpha+\beta & 1 \\ \alpha-\beta & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix}$$

5) Justifier que l'ensemble des solutions du système ci-dessous forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Quelle en est sa dimension ? Donner un élément non nul de F. Fournir une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$$

6) Soit $E = \mathbb{C}_3^2$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des matrices complexes 2×3. On considère les sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$G = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Donner une base de F.
b) Donner une base de $F \cap G$.
c) Les sous-espaces F et H sont-ils en somme directe ? (Justifier.)
En particulier, a-t-on $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?
d) *Déduire* des points précédents si les sous-espaces $F \cap G$ et H sont ou non en somme directe. En particulier, a-t-on $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?
e) Vérifier que

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une base de H. Considérer un élément quelconque de H et donner sa décomposition dans cette base.