Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 4 janvier 2016

Nous donnons les grandes lignes de la correction (les détails sont laissés au lecteur).

3) <u>Vrai–Faux</u>. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soient $A, B \in \mathbb{R}^3_3$. Si $\det(A) = \det(B) = 0$, alors $\det(A + B) = 0$.
FAUX, contre-exemple :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Si le rang d'une matrice A vaut r, alors r colonnes quelconques de A sont toujours linéairement indépendantes.
FAUX, on peut trouver r colonnes bien choisies, mais ce choix n'est pas arbitraire. Par exemple, la matrice suivante est de rang 2 et seules ses deux premières colonnes sont linéairement indépendantes (tout autre choix de deux colonnes fournit des colonnes dépendantes)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Soient $x_1, \ldots, x_k$ des éléments d'un $\mathbb{K}$-vectoriel. Puisque la combinaison linéaire
$$0.x_1 + \cdots + 0.x_k$$
est nulle, on en déduit que $x_1, \ldots, x_k$ sont linéairement indépendants.
FAUX, on est en présence d'une combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls. Dès lors, cette combinaison est toujours nulle et ce, quels que soient les éléments $x_1, \ldots, x_k$. Contre-exemple : dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux éléments
$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
On a bien $0.x_1 + 0.x_2 = 0$ et pourtant, x_1 et x_2 sont linéairement dépendants. Une alternative simple consistait à prendre pour x_1 le vecteur nul.

d. Soient x, y deux élements distincts d'un espace vectoriel. On n'a jamais $\rangle x, y\langle = \rangle x\langle$.
FAUX, contre-exemple :
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

e. Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On définit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $f(2x) = 2x$ et
$$f(2x+1) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } 2x+3 \leq n; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$
L'application f est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

VRAI, on peut remarquer que f laisse invariant les éléments pairs de $\{1,\ldots,n\}$ et permute circulairement les éléments impairs de cet ensemble. Puisqe f est défini sur $\{1,\ldots,n\}$ et à valeurs dans $\{1,\ldots,n\}$, il suffit de vérifier soit l'injectivité, soit la surjectivité de f. Montrons la surjectivité. Supposons $n = 2m$ (pair). Il est clair que $f(2i) = 2i$ pour tout $i \leq m$. Ensuite $f(2m-1) = 1$ et $f(2i-1) = 2i+1$ pour tout $i < m$. Supposons $n = 2m+1$ (impair). Il est clair que $f(2i) = 2i$ pour tout $i \leq m$. Ensuite $f(2m+1) = 1$ et $f(2i-1) = 2i+1$ pour tout $i \leq m$.

4) Calculer le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & \alpha+\beta & 1 \\ \alpha-\beta & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A contient une sous-matrice M de dimensions 2×2 de déterminant non nul (ce n'est pas le seul choix possible)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, son rang vaut au moins 2. Elle contient 3 lignes, donc le rang de A est au plus 3. Le rang de A vaut 2 si et seulement si les sous-matrices qui bordent M ont un déterminant nul

$$det \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ \alpha-\beta & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \alpha + 2\beta$$

$$det \begin{pmatrix} 2 & \alpha+\beta & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha\beta & 1 \end{pmatrix} = -2 - \alpha - \beta - \alpha\beta$$

En substituant, α par $1+2\beta$ dans la seconde relation, on trouve

$$2\beta^2 + 4\beta + 3 = 0.$$

De là, on tire $\beta = \frac{-2-i\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = -1 - i\sqrt{2}$ ou, $\beta = \frac{-2+i\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = -1 + i\sqrt{2}$. Dans tous les autres cas, le rang de A vaut 3.

5) Justifier que l'ensemble des solutions du système ci-dessous forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Quelle en est sa dimension ? Donner un élément non nul de F. Fournir une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un espace vectoriel dont la dimension est égale au nombre d'inconnues (4) moins le rang de la matrice associée au système

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi, on a un sous-espace vectoriel de dimension 2. Une solution non nulle est donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$. Pour une base d'un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$, on sait déjà qu'il suffit de donner deux vecteurs linéairement indépendants (car la dimension d'un supplémentaire vaut $4 - 2 = 2$). Les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conviennent, ils ne sont pas solution du système.

Une alternative est de voir que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'ensemble des solutions et que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

(On a donc une base de $\mathbb{R}^4$ tout entier.)

6) Soit $E = \mathbb{C}_3^2$ le $\mathbb{C}$-vectoriel des matrices complexes 2×3. On considère les sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$G = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \left\{ A \in \mathbb{C}_3^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Donner une base de F.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Donner une base de $F \cap G$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Les sous-espaces F et H sont-ils en somme directe ? (Justifier.) En particulier, a-t-on $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?

Soit une matrice M appartenant à $F \cap H$, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \text{ avec } a + c = 0,\ b + a = 0,\ c + b = 0.$$

On en tire que $a = b = c = 0$. Donc, F et H sont en somme directe. On sait que $\dim \mathbb{C}_3^2 = 6$. Pour que $F \oplus H = \mathbb{C}_3^2$, il suffit de vérifier que

$\dim H = 3$. Une base de H est donnée par (voir aussi le point e) si nécessaire)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) *Déduire* des points précédents si les sous-espaces $F \cap G$ et H sont ou non en somme directe. En particulier, a-t-on $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{C}_3^2$?

Puisque l'on sait déjà que F et H sont en somme directe, alors il est clair qu'il en est de même pour $F \cap G$ et H. Puisque la dimension de $F \cap G$ vaut 2, alors $\dim((F \cap G) \oplus H) = 2 + 3 = 5 < 6$ et $(F \cap G) \oplus H \neq \mathbb{C}_3^2$.

e) Vérifier que

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une base de H. Considérer un élément quelconque de H et donner sa décomposition dans cette base.

On vérifie facilement que les 3 matrices sont linéairement indépendantes. Un élément quelconque de H est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

et se décompose comme

$$c\, u_3 + (b - c)\, u_2 + (a - b)\, u_1.$$

Ceci montre en particulier que u_1, u_2, u_3 forment une partie génératrice de H donc une base.