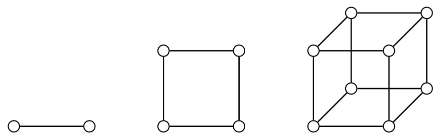
Examen écrit de théorie des graphes
Janvier 2015

Consignes : Il est attendu que les réponses fournies soient clairement justifiées. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation.

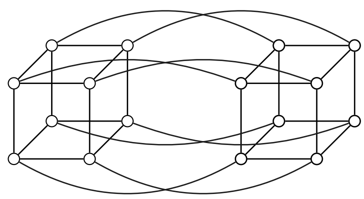
Bon travail !

(1) (5 points) Construire un graphe simple, non orienté et 3-régulier possédant une arête de coupure. Déterminer le nombre minimum de sommets qu'un tel graphe possède (justifier votre réponse).

(2) (5 points) Soit $n \geq 1$. Le *n-cube* Q_n est un graphe défini comme suit. Ci-dessous, sont représentés tout d'abord les graphes Q_1, Q_2 et Q_3 :



Pour tout $n \geq 1$, on obtient Q_{n+1} en considérant deux copies disjointes de Q_n et en ajoutant une arête pour chaque paire de sommets qui se correspondent dans les deux copies de Q_n. Voici une représentation de Q_4 :



a) En fonction de n, combien de sommets et d'arêtes possède Q_n ?
Quel est le degré de chaque sommet de Q_n ?
b) Pour quelles valeurs de n, le n-cube est-il hamiltonien ?
c) Pour quelles valeurs de n, le n-cube est-il eulérien ?
d) Prouver que, pour tout $n \geq 1$, Q_n est un graphe 2-colorable.
En déduire que Q_n est biparti.

(3) (6 points) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Représenter le graphe orienté D ayant M comme matrice d'adjacence.
b) Déterminer les composantes fortement connexes du graphe D.
c) Renuméroter les sommets de D de telle sorte que la matrice d'adjacence correspondante soit bloc-triangulaire composée (supérieure ou inférieure).
d) Déterminer les valeurs propres de D. Exprimer, en fonction de celles-ci, le nombre de chemins fermés de longueur n dans D.
e) Prouver que la matrice M n'est ni primitive, ni irréductible. Est-il possible de remplacer un unique élément de la matrice M pour la rendre irréductible ? Si oui, énumérer toutes les possibilités. Même question pour la rendre primitive. $\longrightarrow$

f) **BONUS** Si c_n dénote le nombre de chemins de longueur n joignant les deux sommets de D réalisant le diamètre de D, prouver que c_n satisfait, pour tout $n \geq 0$ la relation

$$c_{n+4} = 2\,c_{n+3} + c_{n+2} - 2\,c_{n+1} - c_n.$$

(4) (4 points) On considère un graphe planaire G ayant vingt faces triangulaires et douze faces pentagonales. De chaque sommet de G partent deux faces triangulaires et deux faces pentagonales. Déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G.