Examen de théorie des automates et langages formels
janvier 2015

La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

1. (5 points) Soit L le langage sur $\{a, b\}$ des mots contenant exactement deux a et un nombre pair de b. Par exemple, les mots aa, $abbbba$ et $babbabbb$ appartiennent à L.

   – Donner une expression régulière pour L.

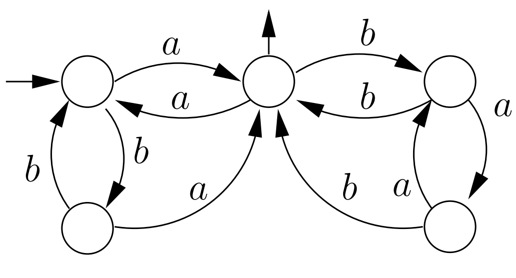
   – Donner un automate déterministe acceptant le langage L.

   – Donner l'automate minimal de L et en vérifier la minimalité.

   – Déterminer la fonction de complexité du langage L: $\rho_L(n) = \#(L \cap A^n)$ (les arguments développés peuvent être courts).

   – Déterminer la clôture commutative de L: $\mathfrak{Com}(L) = \Psi^{-1}\Psi(L)$.

2. (4 points) Soit l'automate représenté ci-dessous.



   – Fournir la table de multiplication du monoïde syntaxique du langage accepté par cet automate. Déterminer si ce langage est ou non sans étoile.

   – Est-il possible de changer l'ensemble des états finals de l'automate ci-dessus de telle sorte que l'automate ainsi obtenu soit l'automate minimal d'un langage régulier ?

3. (4 points) On considère le language M des mots sur $\{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et dont le nombre de b vaut le double du nombre de a. Par exemple, les mots $bababb$, $bbbbbbbaaaab$ appartiennent à M.

   – Montrer que M n'est pas régulier.

   – Fournir une grammaire algébrique engendrant M.

   – Fournir un automate à pile acceptant M.

   – Donner la forme de $\Psi(M)$.

4. (3 points) Soit L le langage formé des facteurs du mot de Thue–Morse,

$$L = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aab, aba, abb, baa, bab, bba, \ldots\}.$$

Ce langage est-il régulier ? Justifier votre réponse.

5. (4 points) Le *coefficient binomial* de deux mots u et v, noté $\binom{u}{v}$, est le nombre de fois que v apparaît comme sous-mot de u (au sens, sous-suite d'une suite). Ainsi,

$$\binom{abbaba}{ab} = 4 \quad \text{et} \quad \binom{abbaba}{bba} = 4.$$

a) Soient u, v des mots finis et σ et τ des lettres. Démontrer que

$$\binom{u\sigma}{v\tau} = \binom{u}{v\tau} + \delta_{\sigma,\tau}\binom{u}{v}$$

où δ est le symbole de Kronecker usuel.

b) Soient u, v des mots et $w = w_0 \cdots w_{n-1}$ un mot de longueur n (les w_i sont des lettres). Démontrer que

$$\binom{uv}{w} = \sum_{i=0}^{n} \binom{u}{w_0 \cdots w_{i-1}} \binom{v}{w_i \cdots w_{n-1}}.$$