Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mercredi 14 janvier 2015

Consignes : La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation des exercices. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

Partie à présenter oralement (avec un support écrit)

1) Etablir la formule de changement de bases dans un espace vectoriel de dimension finie. Préciser les notations utilisées.

2) Enoncer les formules de Cramer (pour un système de n équations linéaires à n inconnues).

3) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. L'ensemble des permutations impaires forme un groupe pour le produit de composition.

b. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{i\pi/4}\, z$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui-même.

c. Soient $n, k > 2$ deux naturels et A une matrice de $\mathbb{C}^n_n$. On considère les matrices

$$B = \sum_{j=1}^{k} j\, A^j$$

et

$$C = \sum_{j=1}^{k} (-j)\, A^{2j-1}.$$

On a $BC = CB$.

d. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

$$F_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \langle,\ F_2 = \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \langle \text{ et } F_3 = \rangle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \langle$$

sont en somme directe.

Partie “exercices” (à rendre au net, avec toutes les justifications nécessaires)

1) Soient a et b des réels non nuls. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

2) Soit F l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^3_3$.

b) Donner une base de F.

c) Montrer que F est stable pour la multiplication des matrices (le produit de deux éléments de F appartient encore à F).

3) Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 1 & \alpha \\ -\alpha & -\alpha & 1 & -\alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha & 2 & 1 \\ 0 & -2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

4) Dans le $\mathbb{C}$-vectoriel $\mathbb{C}^4$, on considère le sous-vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 - i\,x_2 + i\,x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

a) Donner une base de F.

b) Soit le sous-espace vectoriel G donné par

$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ i \end{pmatrix} \langle.$$

Montrer que F et G sont en somme directe.
Donner une base d'un supplémentaire de $F + G$.

c) Quelles sont les dimensions des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F : x_1 - x_4 = 0 \right\}$$

et

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F : x_1 + (2+i)x_2 + 2x_3 - ix_4 = 0 \right\} ?$$