Examen d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
mercredi 14 janvier 2015

Consignes : La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation des exercices. Enoncer les résultats utilisés. Bon travail.

Partie à présenter oralement (avec un support écrit)

1) Soient $\mathbb{K}$ un champ et $D : \mathbb{K}_n^n \to \mathbb{K}$ une application multi-linéaire et alternée sur les colonnes. Enoncer et *démontrer* le lien existant entre les applications D et det.

2) Définir la somme directe de $p \geq 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel. Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $p \geq 2$ sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-vectoriel soient en somme directe.

3) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Un système homogène d'équations linéaires possède toujours une infinité de solutions.
b. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{i\pi/4}\, z$ est une bijection de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ dans lui-même.
c. Soient x, y, z trois éléments d'un $\mathbb{C}$-vectoriel E. Les éléments x, y, z sont linéairement indépendants si et seulement si $x, 2y, iz$ le sont.
d. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si $\dim F + \dim G = \dim E$, alors $E = F \oplus G$.

<u>Partie "exercices"</u> (à rendre au net, avec toutes les justifications nécessaires)

1) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Trouver toutes les matrices B de $\mathbb{R}_3^3$ telles que $AB = 0$. L'ensemble
$$\{B \in \mathbb{R}_3^3 \mid AB = 0\}$$
forme-t-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}_3^3$? Si oui, en donner une base.

2) Soient λ un nombre complexe et la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 1 & \lambda \\ \lambda^3 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\det M = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^3(\lambda^2 + 1)^3$.

b) Déterminer en fonction de λ, le rang de la matrice M.

3) Discuter et résoudre le système suivant en fonction des paramètres complexes a, b,
$$\begin{cases} x & -i\,y & +z & = & 1 \\ -ax & +ay & -z & = & -1 \\ -x & +y & +bz & = & b \end{cases}$$

4) Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-vectoriel
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

a) Donner une base de F.

b) Soit le sous-espace vectoriel G donné par
$$\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \langle.$$
Déterminer une base de $F \cap G$ et de $F + G$.

c) Donner deux supplémentaires distincts de F dans $\mathbb{R}^4$ (en fournissant explicitement une base de chacun d'eux).