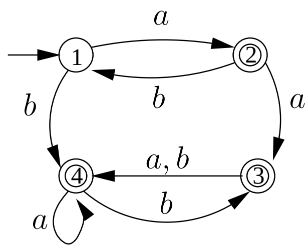
Examen de théorie des automates et langages formels
janvier 2014

La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

1. (5 points) Soit L le langage sur $\{a, b\}$ des mots de longueur au moins 4 contenant un a en deuxième et en avant-dernière position. Par exemple, les mots $b\underline{a}\underline{a}b$ et $a\underline{a}bbabab\underline{a}b$ appartiennent à L.
   - Donner une expression régulière pour L.
   - Donner un automate (déterministe ou non) ayant au plus 5 états et acceptant le langage L.
   - Donner l'automate minimal de L et en vérifier la minimalité.
   - Déterminer la fonction de complexité du langage L: $\rho_L(n) = \#(L \cap A^n)$ (les arguments développés peuvent être courts).
   - Déterminer la clôture commutative de L: $\mathfrak{Com}(L) = \Psi^{-1}\Psi(L)$.

2. (4 points) Soit l'automate représenté ci-dessous.



   - Déterminer si cet automate est minimal.
   - Fournir la table de multiplication du monoïde syntaxique du langage accepté par cet automate. Déterminer si ce langage est ou non sans étoile.

3. (4 points) Trouver, si possible, des langages infinis L et M tels que
   - L est régulier, M n'est pas régulier et $L \cup M$ n'est pas régulier.
   - L est régulier, M n'est pas algébrique et $L \cap M$ est régulier et infini.
   - L n'est pas régulier, M n'est pas régulier et $L \cup M$ est régulier.
   - L n'est pas régulier, L^* est régulier.

4. (4 points) Soit le langage L des mots w sur $\{a, b, c\}$ vérifiant

$$\Psi(w) \in \{m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{N}\}.$$

   Donner un automate à pile $\mathcal{A}$ acceptant L et une grammaire générant L. Justifier en quelques mots votre proposition. Avec les notations du cours, le théorème de représentation de Chomsky-Schützenberger stipule que $L = h(D^R_{\mathcal{A}} \cap R)$. Donner un automate fini acceptant le langage régulier $R \subseteq \Phi^*$ dont il est question.

5. (3 points) Un carré abélien est un mot de la forme uv où v est obtenu en permutant les lettres de u. Par exemple, *abccab* est un carré abélien. Soit Σ un alphabet contenant au moins deux lettres. Montrer que le langage

$$L = \{u \in \Sigma^* \mid u \text{ est un carré abélien}\}$$

   n'est pas régulier. Montrer que sur un alphabet de 3 lettres, tout mot suffisamment long contient un carré abélien.