Interrogation dispensatoire d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
janvier 2014

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Chacune des deux parties (théorie et exercices) est cotée sur 20 points. La moins bonne cote interviendra pour 55% de la note finale.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen. Enoncer les résultats utilisés.

Bon travail !

1) [7 points] Soit $\mathbb{K}$ un champ. Soit $D : \mathbb{K}_3^3 \to \mathbb{K}$ une application multilinéaire et alternée par rapport aux colonnes.

a) Démontrer qu'une telle application est antisymétrique par rapport aux colonnes.

b) Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathbb{K}_3^3$, $D(A)$ est égal à $\det(A)$, à une constante multiplicative près (à déterminer).

2) [7 points] Soit E un $\mathbb{K}$-vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On considère deux bases U, V de E. On note $\Phi_U : E \to \mathbb{K}^n$ le passage aux composantes dans la base U (on définit de la même façon Φ_V). Démontrer qu'il existe une unique matrice A de dimension $n \times n$ telle que

$$\Phi_V(x) = A\,\Phi_U(x) \quad \forall x \in E.$$

Caratériser les éléments de cette matrice A.

3) [6 points] Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soit $n \geq 2$ un entier. Toute application injective de $\mathbb{Z}_n$ dans lui-même est une bijection.

b. L'ensemble des matrices inversibles symétriques de $\mathbb{R}_2^2$ est un groupe (muni du produit matriciel usuel).

c. Il existe une matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ et un vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ tels que le rang de A soit strictement supérieur au rang de la matrice augmentée $(A|b) \in \mathbb{C}_{n+1}^n$.

d. Dans $\mathbb{R}^3$ considére comme $\mathbb{R}$-vectoriel, les sous-vectoriels

$$F_1 = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \langle, \quad F_2 = \rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle \text{ et } F_3 = \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \langle$$

sont en somme directe. .

e. La dimension de $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel vaut 1.

f. La relation R définie comme suit est une relation d'équivalence. Pour tous nombres complexes z, z', on a $z\,R\,z'$ si et seulement si il existe $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $z = e^{i\theta} z'$.

Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Justifiez vos réponses. Enoncer les résultats utilisés. Fin de l'interrogation: **12h45**.

1) [5 points] Etudier la compatibilité et résoudre le système suivant (où m est un paramètre réel).

$$\begin{cases} m\,x + (m-1)\,y = & m+2 \\ (m+1)\,x - m\,y = & 5m+3. \end{cases}$$

2) [4 points] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \overline{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α, sous forme trigonométrique, pour lesquelles M est inversible et dans ce cas, donner son inverse.

3) [4 points] Décomposer la permutation suivante en un produit de cycles disjoints et en déduire sa signature

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 6 & 12 & 11 & 2 & 10 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Que valent μ^2 et μ^{360} ? Justifier ce dernier calcul. Calculer l'inverse de μ^{32}.

4) [7 points] On se place dans $\mathbb{R}^4$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel. On considère l'ensemble

$$F = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_4 = 0 \}$$

et le sous-espace vectoriel $G = \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \langle$.

a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel et en donner une base.
b) F et G sont-ils en somme directe ?
c) Trouver un supplémentaire de $F + G$.
d) Soit H le sous-espace vectoriel dont une base est donnée par

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

Donner une base de $H \cap F$ et une base de $H + F$.