Examen de théorie des automates et langages formels
janvier 2013

La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

1. (6 points) On considère le langage P des mots sur $\{a,b\}^*$ contenant le même nombre d'occurrences des facteurs ab et ba. Par exemple, $aaba$ et $baababbab$ appartiennent au langage mais $ababab$ n'y appartient pas.
   – Construire l'automate minimal $\mathcal{A}_P$ de P, prouver sa minimalité et vérifier que $\mathcal{A}_P$ possède 5 états.
   – Donner une expression régulière pour P (fournir une telle expression suffit).
   – Donner la table de multiplication du monoïde syntaxique de P. En déduire que, pour tout mot $w \in \{a,b\}^*$, on a $[w] \circ [w] = [w]$.

2. (4 points) Soit le langage $L = (aba)^*$.
   – Montrer qu'un mot w non vide appartient à L si et seulement si w possède ab comme préfixe, ba comme suffixe et que aaa, bab, bb n'apparaissent aucun comme facteur de w.
   – En déduire une expression régulière *ad hoc* montrant que L est sans étoile.
   – Vérifier que dans le monoïde syntaxique, $[bb]$ est *absorbant*, i.e., pour tout mot $w \in \{a,b\}^*$, $[w] \circ [bb] = [bb] = [bb] \circ [w]$.

3. (5 points) Soient les langages
$$L_1 = \{a^k b^\ell \mid k,\ell \geq 1,\ \mathrm{pgcd}(k,\ell) = 1\} \text{ et}$$
$$L_2 = \{a^k b^\ell \mid k,\ell \geq 1,\ k < \ell \text{ ou } k > 2\ell\}.$$
   – Montrer que si L_1 était régulier, il existerait deux nombres premiers distincts p_1, p_2 tels que $(a^{p_1})^{-1}.L = (a^{p_2})^{-1}.L$. En déduire que L_1 n'est pas régulier.
   – Caractériser les mots appartenant à $\{a,b\}^* \setminus L_2$.
   Ce langage $\{a,b\}^* \setminus L_2$ est-il régulier ?
   – Le langage L_2 est-il régulier et/ou algébrique ?

4. (5 points) On considère le mot de Thue–Morse $t = abbabaab\cdots$ obtenu comme point fixe du morphisme itéré $\mu : a \mapsto ab, b \mapsto ba$.
   – Montrer que tout facteur de longueur au moins 5 de t contient un facteur aa ou bb. (On peut utiliser, sans preuve, les propriétés de t vues au cours.)
   – Soit la suite de mots finis $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_0 = a$ et
$$X_{n+1} = X_n \overline{X_n},\ \forall n \geq 0$$
   où le morphisme $w \mapsto \overline{w}$ est donné par $\overline{a} = b$ et $\overline{b} = a$. Expliquer pourquoi la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge et montrer que t en est la limite.
   – Si $t = t_0 t_1 \cdots$, on dit qu'un facteur u apparaît dans t en position n si $t = t_0 \cdots t_{n-1} u \cdots$. Démontrer que aa et bb n'apparaissent dans t qu'en des positions impaires. Par exemple, la première occurrence de bb (resp. aa) apparaît en position 1 (resp. 5).
   – En déduire que, pour tout facteur u de longueur au moins 5 de t, u n'apparaît qu'en des positions ayant même parité.