Examen de théorie des automates et langages formels
janvier 2012

La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

1. (4 points) On considère l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ et le langage L formé des mots sur Σ dont la somme des chiffres est divisible par 6. Par exemple, 123213 appartient à L mais 1123 n'y appartient pas. Construire l'automate minimal de L et prouver que l'automate obtenu est bien minimal.

2. (4 points) Soient les langages
   $$L_1 = \{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \geq 0\} \text{ et } L_2 = \{a^j b^i c^i d^k \mid i, j, k \geq 0\}.$$
   - Le langage L_1 est-il régulier ? Justifier votre réponse.
   - Montrer que L_1 et L_2 sont algébriques.
   - Qu'en est-il de $L_1 \cap L_2$? Justifier votre réponse.
   - Donner un automate à pile acceptant le langage L_1.

3. (6 points) On considère le langage P des mots sur $\{a, b\}^*$ contenant un nombre pair de facteur ba. Par exemple, $aab\underline{ba}a\underline{ba}a$ appartient au langage mais $abbaab$ n'y appartient pas.
   - Construire l'automate minimal de P et prouver sa minimalité.
   - Donner une expression régulière pour P (fournir une telle expression suffit).
   - Quelle relation de récurrence linéaire satisfait la fonction de complexité $\rho_P(n)$? Démontrer que
     $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\rho_P(n)}{2^n}$$
     existe et est finie.
   - Combien d'éléments contient le monoïde syntaxique de P ?

4. (3 points) Soit le mot infini $w = abaabaaaba^4ba^5b \cdots ba^nba^{n+1}b \cdots$. Montrer que le langage formé des préfixes (finis) de w n'est pas algébrique.

5. (3 points) On considère l'application de *filtration* $f : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ qui efface une lettre sur deux (en conservant la première lettre) et qui est définie formellement par
   $$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon, \\ f(w_1 w_2 w_3 \cdots w_{2n-1} w_{2n}) &= w_1 w_3 \cdots w_{2n-1}, \\ f(w_1 w_2 w_3 \cdots w_{2n-2} w_{2n-1}) &= w_1 w_3 \cdots w_{2n-1}, \end{aligned}$$
   avec $n \geq 1$, $w_i \in \{a, b\}$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi, $f(ababa) = aaa$ et $f(abbaba) = abb$. Si $L \subseteq \{a, b\}^*$ est un langage, on pose
   $$f(L) = \{f(m) \mid m \in L\}.$$
   Démontrer que si L est régulier, alors $f(L)$ est aussi régulier.