Interrogation dispensatoire d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
janvier 2012

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Partie "théorie" de 8h30 à **10h15**.
- Partie "exercices" de 10h30 à 12h30.
- Chacune des deux parties est cotée sur 10 points. La moins bonne cote interviendra pour 55% de la note finale.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen. Enoncer les résultats utilisés.

Bon travail !

1) Qu'est-ce qu'un système de Cramer? Enoncer et démontrer les formules de Cramer. (On suppose admis le lemme permettant d'exprimer un cofacteur.)

2) Soit U une base d'un $\mathbb{K}$-vectoriel E de dimension finie n. Démontrer que l'application $\Phi_U : E \to \mathbb{K}^n$ de passage aux composantes est une bijection entre E et $\mathbb{K}^n$.

3) Soient $\mathbb{K}$ un champ et $n \geq 2$ un entier. Le *permanent* d'une matrice carrée $A \in \mathbb{K}_n^n$ est défini par

$$\mathrm{perm}(A) = \sum_{\nu \in \mathcal{S}_n} a_{\nu(1),1} \cdots a_{\nu(n),n}.$$

- Que vaut $\mathrm{perm}(I)$ et plus généralement, $\mathrm{perm}(\Delta)$ où Δ est une matrice diagonale ? Expliquer votre raisonnement.
- Soit μ une permutation de $\mathcal{S}_n$. Montrer que
  $$\mathcal{S}_n = \{\nu\mu \mid \nu \in \mathcal{S}_n\}$$
  et en déduire que le permanent est symétrique par rapport aux colonnes de A, i.e., $\mathrm{perm}(C_1 \cdots C_n) = \mathrm{perm}(C_{\mu(1)} \cdots C_{\mu(n)})$ pour tout $\mu \in \mathcal{S}_n$.
- Le permanent est-il alterné (par rapport aux colonnes) ?

4) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soit $n \geq 3$ un entier impair. L'application $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ x \mapsto 2x$ est une permutation de $\mathbb{Z}_n$.

b. Soit A un matrice de $\mathbb{C}_n^m$. S'il existe r indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ tels les colonnes $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$ sont linéairement indépendantes, alors A est de rang égal à r.

c. Soient $A, B \in \mathbb{R}_n^n$. On a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

d. Soient $A, B \in \mathbb{R}_n^n$ deux matrices carrées symétriques. La matrice AB est symétrique.

e. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels distincts de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. On a toujours $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Répondre à des questions différentes sur des <u>feuilles</u> <u>distinctes</u> et <u>numérotées</u>. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Justifier vos réponses. Enoncer les résultats utilisés. Fin de l'interrogation: **12h30**.

1) Soit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, les premiers termes de cette suite sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- En exprimant $M^{m+n} = M^m.M^n$, déduire que pour tous $m, n \geq 1$

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \text{ et } F_{2n+1} = 2F_nF_{n+1} + F_{n-1}^2.$$

- Prouver que pour tout $n \geq 2$, on a $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

2) En se plaçant dans $\mathbb{Z}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$, discuter et résoudre le système suivant en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{Z}_{11}$

$$\begin{cases} \alpha x + y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x + y + \alpha z &= 1. \end{cases}$$

3) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F et G deux sous-espaces vectoriels *distincts* de dimension $n-1$. Quelle est la dimension de $F \cap G$?

4) Soient les sous-vectoriels $F = \rangle a, b, c\langle$ et $G = \rangle d, e, f\langle$ de $\mathbb{R}^4$ construits sur les vecteurs

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Quelle est la dimension de G ? En donner une base.
- Quelle est la dimension de $F + G$? En particulier, F et G sont-ils en somme directe ?
- Comparer G et le sous-espace vectoriel H donné par

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x + 4y + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

- Le vecteur $(-20, 11, 6, 15)^{\sim}$ constitue-t-il une base de $F \cap G$?
- Caractériser un supplémentaire de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$.
- Vérifier que le sous-espace vectoriel K donné ci-dessous est strictement inclus dans F

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - y + 6z - 3t = 0 \\ x + 3z - 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$