Interrogation dispensatoire d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 17 janvier 2011

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Partie "théorie" de 8h30 à **10h00**.
- Partie "exercices" de 10h15 à 12h30.
- Chacune des deux parties est cotée sur 10 points. La moins bonne cote interviendra pour 55% de la note finale.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

Bon travail !

1) a. Enoncer (sans preuve) les deux lois des mineurs.
b. Déduire du point précédent, une formulation matricielle de ces lois.

2) Etablir la condition nécessaire et suffisante sur $m \geq 2$ pour que l'anneau $\mathbb{Z}_m$ muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication *modulo* m soit un champ.

3) Etablir la formule de changement de base pour un espace vectoriel E de dimension n sur le champ $\mathbb{K}$. On veillera à préciser le contexte envisagé et les notations utilisées. Définir la notion d'isomorphisme entre deux espaces vectoriels et donner un exemple de deux espaces vectoriels (distincts) isomorphes.

4) Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffire) ou un contre-exemple explicite.

a. Soit $n \geq 2$. Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de transpositions.

VRAI. Toute permutation distincte de l'identité se décompose en un produit de cycles disjoints et tout cycle est un produit de transpositions. En particulier, on a aussi $id = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$.

b. Soit $n \geq 3$. Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est un produit de cycles de longueur 3.

FAUX. Remarquons tout d'abord qu'un cycle de longueur 3 est une permutation paire. Dès lors, tout produit de cycles de longueur 3 est aussi une permutation paire car $\operatorname{sign}(\mu\nu) = \operatorname{sign}(\mu)\operatorname{sign}(\nu)$ pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{S}_n$. Par conséquent, une permutation impaire ne peut jamais être un produit de cycles de longueur 3.

c. Soit $A \in \mathbb{R}^n_n$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout vecteur colonne $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Ab \neq 0$.

VRAI. Une matrice A est inversible si et seulement si ses colonnes $C_1, \ldots, C_n$ sont linéairement indépendantes. Autrement dit, si et seulement si, pour tous réels $b_1, \ldots, b_n$ non tous nuls, $b_1C_1 + \cdots + b_nC_n \neq 0$. Pour conclure, on remarque que si $b = \begin{pmatrix}b_1 & \cdots & b_n\end{pmatrix}^{\sim}$, alors $Ab = b_1C_1 + \cdots + b_nC_n$.

d. Soient $A, B \in \mathbb{R}^n_n$. Si $A \neq 0$, alors le rang de AB est égal au rang de B.
FAUX. Un contre-exemple suffit. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\mathrm{rg}(AB) = 0$ et $\mathrm{rg}(B) = 1$.

e. Il existe un champ contenant deux éléments a, b non nuls et tels que $a.b = 0$.

FAUX. Supposons qu'il existe a, b non nuls tels que $a.b = 0$. En particulier, a est inversible et donc $a^{-1}.a.b = 0$. On en tire $b = 0$ ce qui est absurde.

Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention). Justifier vos réponses. Fin de l'interrogation: **12h30**.

1) [2 points] On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcr} \alpha\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 6 \\ x_1 + \alpha\, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 12 \\ x_1 + x_2 + \alpha\, x_3 + x_4 + x_5 & = & 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \alpha\, x_4 + x_5 & = & 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \alpha\, x_5 & = & 96 \end{array}\right.$$

A quelle(s) condition(s) sur $\alpha \in \mathbb{R}$ s'agit-il d'un système de Cramer ? Dans le cas particulier où $\alpha = 2$, calculer explicitement la solution (il est loisible de procéder sans inverser la matrice du système).

Solution : Il vient (par exemple, en effectuant $L_5 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ puis en soustrayant C_5 des autres colonnes)

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha + 4)(\alpha - 1)^4.$$

Dès lors, le système est de Cramer si et seulement si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -4$. Pour la deuxième partie de la question, on se ramène facilement à un système triangulaire. On soustrait tout d'abord la première équation des autres équations.

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 6 \\ x_1 + 2\, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 12 \\ x_1 + x_2 + 2\, x_3 + x_4 + x_5 & = & 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2\, x_4 + x_5 & = & 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2\, x_5 & = & 96 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 2\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 6 \\ -x_1 + x_2 & = & 6 \\ -x_1 + x_3 & = & 18 \\ -x_1 + x_4 & = & 42 \\ -x_1 + x_5 & = & 90 \end{array}\right.$$

En substituant, la première équation devient

$$2x_1 + x_1 + 6 + x_1 + 18 + x_1 + 42 + x_1 + 90 = 6.$$

De là, $x_1 = -25$ et on trouve $x_2 = -19$, $x_3 = -7$, $x_4 = 17$ et $x_5 = 65$.

2) [2 points] Soit $p > 2$ un nombre premier. Les éléments de $\mathbb{Z}_p$ sont notés $0, 1, \ldots, p-1$.

a) Démontrer que l'application $f : x \mapsto 1 - x^{-1}$ est une permutation de $\mathbb{Z}_p \setminus \{0, 1\}$. Pour $p = 7$, décomposer f en un produit de cycles disjoints.

b) Pour $p = 37$, résoudre dans $\mathbb{Z}_p$ le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 7y &= 3 \\ 6x + 30y &= 0. \end{cases}$$

Solution : Pour montrer que f est une bijection de $\mathbb{Z}_p \setminus \{0, 1\}$, puisque $\mathbb{Z}_p \setminus \{0, 1\}$ est fini, il suffit de vérifier qu'il s'agit d'une injection ou d'une surjection (on peut bien sûr vérifier les deux propriétés, mais c'est inutile). Montrons par exemple que f est une injection. Soient $x, y \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 1\}$ tels que $f(x) = f(y)$, c'est-à-dire $1 - x^{-1} = 1 - y^{-1}$. Dès lors, on a $x^{-1} = y^{-1}$ et $(x^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1}$, autrement dit $x = y$. Ceci prouve le caractère injectif de f.

Pour $p = 7$, en travaillant modulo 7, on trouve $f(2) = 1 - 2^{-1} = 1 - 4 = -3 = 4$, $f(4) = 1 - 4^{-1} = 1 - 2 = -1 = 6$, $f(6) = 1 - 6^{-1} = 1 - 6 = 2$. On a donc un premier cycle $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Ensuite, $f(3) = 1 - 3^{-1} = 1 - 5 = 3$ et $f(5) = 1 - 5^{-1} = 1 - 3 = 5$. Ainsi, la permutation f de $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0, 1\}$ est donnée par le cycle $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Pour la deuxième partie, on peut remarquer que $30 = -7 \bmod 37$. Dès lors en additionnant les deux équations, on a $9x = 3$. L'inverse de 9 modulo 37 est donné par 33 (par exemple, utiliser l'algorithme d'Euclide). Ainsi, $9x = 3 \bmod 37$, donne en multipliant les deux membres par 33, $x = 99 \bmod 37$, i.e., $x = 25$. De là, $7y = 3 - 3.25 = 2 \bmod 37$. L'inverse de 7 modulo 37 est donné par 16. Ainsi, on trouve $y = 32$.

3) [1,5 points] Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E réflexive et transitive. On définit, pour tous $x, y \in E$, les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)$ et $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x)$ respectivement. Pour chacune de ces deux relations, déterminer s'il s'agit ou non d'une relation d'équivalence (le démontrer ou fournir un contre-exemple explicite).

Solution : La relation $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur E. En effet, puisque $\mathcal{R}$ est réflexif, pour tout $x \in E$, on a $x\mathcal{R}x$ et donc $x\mathcal{S}x$. Supposons à présent que $x, y, z \in E$ sont tels que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$. Par définition de $\mathcal{S}$, on a donc $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}x$, $y\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}y$. Puisque $\mathcal{R}$ est transitif, on en tire que $x\mathcal{R}z$ (car $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) et aussi que $z\mathcal{R}x$ (car $z\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$). Donc, par définition de $\mathcal{S}$, on a bien $x\mathcal{S}z$, ce qui signifie que $\mathcal{S}$ est transitif. Il reste à montrer que $\mathcal{S}$ est symétrique. Soient x, y tels que $x\mathcal{S}y$. On a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ et on conclut directement que $y\mathcal{S}x$.

La relation $\mathcal{T}$ n'est pas une relation d'équivalence sur E. On peut montrer qu'elle est réflexive et symétrique. Cependant, en toute généralité, $\mathcal{T}$ n'est pas réflexif. Considérons le contre-exemple suivant. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et la relation $\mathcal{R}$ sur E définie par $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (2, 3)\}$. Elle est bien réflexive et trivialement transitive. Pour cet exemple, il vient

$$\mathcal{T} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Dès lors, $\mathcal{T}$ n'est pas transitif puisque $1\mathcal{T}3$, $3\mathcal{T}2$ mais on n'a pas $1\mathcal{T}2$.

4) [2,5 points] Soit le $\mathbb{C}$-vectoriel $E = \mathbb{C}_3^3$ des matrices 3×3 à coefficients complexes. Soient $\mathcal{A}$, le sous-vectoriel de E formé des matrices symétriques (i.e., $\widetilde{M} = M$) dont la somme des éléments diagonaux est nulle et $\mathcal{B}$, le sous-vectoriel de E formé des matrices triangulaires supérieures.

a) Donnez une base de $\mathcal{A}$ et une base de $\mathcal{B}$.

b) Donnez une base de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. En particulier, la somme de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est-elle directe ? oui/non, justifiez.

c) Donnez un supplémentaire de $\mathcal{B}$ dans E. Quelle en est sa dimension ?

d) Donnez une base de $\mathcal{A}$, si cet espace est, cette fois, considéré non pas comme un $\mathbb{C}$-vectoriel mais comme un $\mathbb{R}$-vectoriel.

Solution : a) une base de $\mathcal{A}$ est donnée par (à justifier)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\mathcal{B}$ est donnée par (à justifier)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Les matrices appartenant à $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{C}$$

et une base de $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est donc donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cet espace n'étant pas réduit à $\{0\}$, la somme de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ n'est donc pas directe.

c) Un supplémentaire de $\mathcal{B}$ dans E est donné par (à justifier)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de dimension 3.

d) Une base de $\mathcal{A}$ considéré comme $\mathbb{R}$-vectoriel est donnée par (à justifier)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

5) [2 points] Soient $A \in \mathbb{C}^n_n$ et $v \in \mathbb{C}^n$. On se place dans $\mathbb{C}^n$ vu comme $\mathbb{C}$-vectoriel et on y considère l'enveloppe linéaire K_v de l'ensemble $\{A^i v \mid i \geq 0\}$.

a) Quelle est la forme générale d'un élément de K_v ?

b) Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Av = \alpha v$ si et seulement si $\dim K_v = 1$. (*Suggestion* : si $Av = \alpha v$, alors $A^i v = \alpha^i v$.)

c) Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donner une base de K_v.

d) Si $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trouver un vecteur $v \in \mathbb{C}^3$ tel que $\dim K_v = 2$.

Solution : a) L'enveloppe linéaire de $\{A^i v \mid i \geq 0\}$ contient les combinaisons linéaires d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble considéré. Ainsi, un élément de K_v est de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, A^i v$$

pour un entier $n \geq 0$ et des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$. (Si $n = 0$, la somme ci-dessus vaut 0.)

b) Partout, on supposera $v \neq 0$. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Av = \alpha v$. Dès lors, un élément quelconque de K_v de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, A^i v$$

se réécrit (en exploitant la suggestion)

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, A^i v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, \alpha^i v = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \, \alpha^i \right) v.$$

Ceci prouve que $K_v = \rangle v \langle$. Réciproquement, si $\dim K_v = 1$, puisqu'en particulier v et Av appartiennent à K_v, alors on en conlcut que v et Av sont linéairement dépendants.

c) Remarquez que puisque K_v est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$, sa dimension est au plus 2. On remarque que

$$Av = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont deux éléments linéairement indépendants appartenant à K_v donc ici, $\dim K_v = 2$ et une base est donnée par (v, Av).

d) Soit

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Il vient, } A^j v = \begin{pmatrix} j+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall j \geq 0.$$

Avec ce choix, on s'aperçoit que K_v est bien de dimension 2. En effet, K_v est de dimension au plus deux puisque tout élément de K_v a une troisième composante nulle et de plus, v et Av sont linéairement indépendants.