# Interrogation dispensatoire d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 11 janvier 2010

**Consignes** :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Partie "théorie" de 8h30 à **10h15**.
- Partie "exercices" de 10h30 à 12h30.
- Chacune des deux parties est cotée sur 10 points. La moins bonne cote interviendra pour 55% de la note finale.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

Bon travail !

**1)** Définir la signature d'une permutation. Que peut-on dire du nombre de permutations paires et impaires de $\mathcal{S}_n$, $n \geq 2$ ? Enoncer et démontrer le résultat s'y rapportant.

**2)** Enoncer et démontrer deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'équations linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues soit compatible. On précisera à chaque fois les dimensions des vecteurs et matrices utilisés.

**3)** Vrai–Faux. Justifier à chaque fois votre réponse par une preuve (énoncer un résultat théorique du cours peut suffir) ou un contre-exemple explicite.

a. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-vectoriel et $x, y, z$ trois éléments distincts de $E$ qui, pris deux à deux, sont linéairement indépendants. La partie $\{x, y, z\}$ est libre.

b. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-vectoriel et $p$ vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in E$, $p \geq 2$. Si aucun de ces vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres, alors la partie $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est libre.

c. Un sous-espace vectoriel $F$ d'un espace vectoriel $E$ possède un unique supplémentaire.

d. Soient $x = 2^{17}.5^{14}.11^{11}$ et $y = 3^{61}.7^2.13^{13}$. Il existe des entiers $a$ et $b$ tels que $a.x + b.y = 1$.

e. Trois sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, F_3$ d'un espace vectoriel $E$ sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0\}$.

**Consignes** :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Justifier vos réponses. Fin de l'interrogation: **12h30**.

**1)** Soit $n \geq 2$. Une matrice carrée $A \in \mathbb{K}_n^n$ est dite *centro-symétrique*, si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}.$$

a. Montrer que si $A$ et $B$ sont centro-symétriques, alors $AB$ aussi.

b. Soient $B, C \in \mathbb{K}_n^n$ deux matrices telles que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$b_{n+1-i,n+1-j} = c_{i,j}.$$

Montrer que $\det B = \det C$. (*Suggestion* : observer que $C$ s'obtient à partir de $B$ par des manipulations élémentaires.)

c. Montrer que si $A$ est centro-symétrique et inversible, alors $A^{-1}$ est aussi centro-symétrique. (*Suggestion* : il est permis d'utiliser le point précédent.)

**2)** Discuter, en fonction du paramètre complexe $m$, le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

**3)** Montrer que les polynômes $1, 1-X, X-X^2, \ldots, X^{n-1}-X^n$ forment une base du $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ des polynômes de degré au plus $n$. Obtenir la matrice de changement de base, pour passer des composantes dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ aux composantes dans la base $(1, 1-X, X-X^2)$.

**4)** Soit l'ensemble

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}$$

muni de l'opération $\oplus : V \times V \to V$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' \\ (y^3 + y'^3)^{1/3} \\ z + z' + 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(V, \oplus)$ est un groupe commutatif. Donner explicitement son neutre et l'opposé d'un élément quelconque.

**5)** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-vectoriel et $F, E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $F_i = F \cap E_i$.

a. Montrer que la somme $G = F_1 + \cdots + F_n$ est directe

b. Comparer $F$ et $G$ (inclusion ?) et montrer qu'en général, $F \neq G$.