Interrogation dispensatoire d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 5 janvier 2009

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Justifier vos réponses. Fin de l'interrogation: **12h30**.

1) [**2 points**] Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha} & \overline{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \overline{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez les valeurs de α pour lesquelles M est inversible et dans ce cas, donnez son inverse.

Solution: Tout d'abord, on calcule

$$\det M = 1 - 2\alpha\overline{\alpha} + \alpha^2\overline{\alpha}^2 = (|\alpha|^2 - 1)^2.$$

De là, on en tire que M est inversible si et seulement si $|\alpha| \neq 1$. Dans ce cas, l'inverse de M est donné par

$$\frac{1}{|\alpha|^2 - 1} \begin{pmatrix} -1 & \overline{\alpha} & 0 \\ \alpha & -(1 + |\alpha|^2) & \overline{\alpha} \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

2) [**3 points**] Précisez les conditions, portant sur les nombres réels a, b et c, pour que le système suivant admette des solutions non nulles. Explicitez ces solutions.

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ (b+c)\,x + (c+a)\,y + (a+b)\,z = 0 \\ bc\,x + ac\,y + ab\,z = 0 \end{array} \right. .$$

Solution: Un système homogène de 3 équations linéaires à 3 inconnues possède une solution non nulle si et seulement si la matrice du système n'est pas inversible (i.e., on n'a pas un système de Cramer). Ainsi, le système admet des solutions non nulles si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire, si et seulement si $(a-b)(a-c)(b-c) = 0$. Il faut donc envisager la situation : $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Si $a = b \neq c$, la matrice du système devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+c & a+c & 2a \\ ac & ac & a^2 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2 car la sous-matrice 2×2 du coin supérieur droit a pour déterminant $a - c \neq 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions est, dans ce cas, un sous-espace vectoriel de dimension $3 - 2 = 1$. On peut donc ne considérer que les deux premières équations et écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a+c & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} 1 \\ a+c \end{pmatrix}.$$

De là,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-x}{a-c} \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ -a-c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble des solutions du système est

$$\{(\lambda, -\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Les cas $a = c \neq b$ et $b = c \neq a$ se traitent de manière semblable par symétrie.

Si $a = b = c$, le système se réduit à la seule équation $x + y + z = 0$ (la matrice du système est de rang 1) et ses solutions décrivent le sous-espace vectoriel de dimension 2 :

$$\{(\lambda, \mu, -\lambda - \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

3) [**3 points**] Dans le $\mathbb{R}$-vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et les sous-espaces vectoriels $F = \rangle a, b \langle$ et $G = \rangle c, d \langle$.

3.a) Donnez une base de $F \cap G$.

3.b) Peut-on déduire du point précédent si $F + G = \mathbb{R}^4$? Pourquoi ? En particulier, si $F + G \neq \mathbb{R}^4$, donnez explicitement un élément de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas à $F + G$.

3.c) Construire (en fournissant une base) un sous-espace vectoriel H qui soit, simultanément, supplémentaire de F et de G dans $\mathbb{R}^4$.

<u>Solution</u> : a) Tout d'abord, on peut remarquer que $\dim F = \dim G = 2$. Ainsi, $F \cap G$ est de dimension ≤ 2. Un vecteur x appartient à $F \cap G$ si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ tels que $x = \alpha a + \beta b$ et $x = \lambda c + \mu d$. Recherchons donc les solutions $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ du système $\alpha a + \beta b - \lambda c - \mu d = 0$. On vérifie facilement que la matrice du système ayant pour colonnes $\begin{pmatrix} a & b & -c & -d \end{pmatrix}$ est de rang 3. Ainsi le système n'a qu'une infinité simple de solutions. Autrement

dit, $F \cap G$ est de dimension 1. Les vecteurs a, b, c, d étant linéairement dépendants, on peut par exemple remarquer que $3a - 2b = c$. De la discussion qui précède, on conclut que $F \cap G = \rangle c \langle$.

b) Puisque $F \cap G$ est de dimension 1, on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3$ et donc $F + G$ ne peut être égal à $\mathbb{R}^4$. Pour trouver un élément n'appartenant pas à $F + G$, il suffit de trouver un élément n'appartenant pas à $\rangle a, b, c, d \langle = \rangle a, b, d \langle$ car c est combinaison linéaire de a et de b. On cherche donc un élément x tel que a, b, d, x soient linéairement indépendants. Par exemple, e_4 convient. On vérifie que le déterminant ayant pour colonnes a, b, d, e_4 est non nul.

c) On cherche deux vecteurs y et z tels que a, b, y, z soient linéairement indépendants et que c, d, y, z soient aussi linéairement indépendants. Par exemple, $y = e_3$ et $z = e_4$ conviennent. Il suffit de vérifier que les déterminants correspondants sont non nuls,

$$\det \begin{pmatrix} a & b & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

et

$$\det \begin{pmatrix} c & d & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

4) [3 points] On considère l'ensemble $E =]0, +\infty[$ des nombres réels strictement positifs muni d'une opération binaire interne $\oplus : E \times E \to E$ définie par

$$\forall a, b \in E : a \oplus b = ab$$

et d'une opération externe $\otimes : \mathbb{R} \times E \to E$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall a \in E : \lambda \otimes a = a^\lambda.$$

4.a) Vérifier que E muni de ces deux opérations est bien un $\mathbb{R}$-vectoriel.

4.b) Soit $n \geq 2$, un entier. On étend les opérations de E à $E^n = E \times \cdots \times E$ par $(a_1, \ldots, a_n) \oplus (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \oplus b_1, \ldots, a_n \oplus b_n)$ et $\lambda \otimes (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda \otimes a_1, \ldots, \lambda \otimes a_n)$. Montrer que les vecteurs de E^2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants en exhibant une relation linéaire les liant.

4.c) Donnez (avec les justifications nécessaires) une base de E et plus généralement, une base de E^n.

Solution : a) L'opération $\oplus$ est associative et commutative car la multiplication dans E l'est. Le neutre pour $\oplus$ est 1 car pour tout $x \in E$, $1 \oplus x = x = x \oplus 1$.

Enfin pour tout $x \in E$, $1/x$ appartient encore à E et $x \oplus 1/x = 1$. Par conséquent, E muni de l'opération $\oplus$ est un groupe commutatif. Enfin pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}1 \otimes x = x^1 = x\\(\lambda.\mu) \otimes x = x^{\lambda.\mu} = (x^\mu)^\lambda = \lambda \otimes (\mu \otimes x)\\(\lambda + \mu) \otimes x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = x^\lambda \oplus x^\mu = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)\\\lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda \otimes xy = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y).\end{aligned}$$

b) On cherche $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\lambda \otimes \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \oplus \mu \otimes \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \oplus \nu \otimes \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a $2^\mu 2^\nu = 1$ et $2^\lambda 4^\nu = 1$. Par exemple, $\lambda = 2$, $\mu = 1$ et $\nu = -1$ conviennent.

c) Tout élément de E différent de 1 convient comme base. En effet, considérons $2 \in E$. Tout $x \in E$ s'obtient comme

$$x = 2^{\log_2 x} = (\log_2 x) \otimes 2.$$

Si les e_i sont les vecteurs unitaires usuels, une base de E^n est donnée par les éléments

$$b_i = e_i + (e_1 + e_2 + \cdots + e_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

ayant un 2 en position i et des 1 partout ailleurs. En effet, pour tout élément de E^n on a

$$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = (\log_2 x_1) \otimes b_1 \oplus \cdots \oplus (\log_2 x_n) \otimes b_n.$$

Il est enfin immédiat de vérifier que

$$\lambda_1 \otimes b_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes b_n = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$