Interrogation dispensatoire d'algèbre-géométrie

Premier bachelier en sciences physiques,
lundi 7 janvier 2008

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Partie "théorie" de 8h30 à **10h15**.
- Partie "exercices" de 10h30 à 12h30.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

Bon travail !

1.a) Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel E. Les vecteurs $x_1 = u+v$, $x_2 = u-2v+w$, $x_3 = v-w$ et $x_4 = 3u+2v+w$ sont-ils linéairement indépendants ? Pourquoi ?

1.b) Quand dit-on que des points $P_1, \ldots, P_k$ d'un espace affin sont affinement dépendants ?

1.c) Dans un espace affin de dimension 3 muni d'un repère, donner l'équation générale d'un plan contenant une droite d'équation

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

1.d) Si $A \in \mathbb{C}_n^n$ est une matrice inversible, donnez une formule permettant de calculer son inverse A^{-1}.

1.e) Enoncer la règle permettant le calcul du rang d'une matrice par la méthode des matrices bordées, en rappelant au préalable ce que signifie le fait qu'une matrice A *borde* une matrice B.

1.f) Quand dit-on qu'un système d'équations linéaires est *compatible* ? Quand dit-on qu'il est *de Cramer* ?

2) Enoncer et démontrer les deux règles des mineurs. Le lemme permettant d'obtenir ces deux règles sera rappelé sans démonstration.

3) Enoncer et démontrer la propriété fondamentale des variétés affines (et qui concerne les combinaisons affines de points d'une variété affine).

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Justifier vos réponses. Fin de l'interrogation: **12h30**.

1) Etudier la compatibilité et résoudre le système suivant (où m est un paramètre réel).

$$\left\{\begin{array}{rl}(m+1)\,x - m\,y = & 10m+6\\ m\,x + (m-1)\,y = & 2m+4\end{array}\right.$$

2) Soient $\mathbb{R}_n^n$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n et $J \in \mathbb{R}_n^n$ une matrice telle que $J^2 = I$. On considère l'ensemble

$$E = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : A = aI + bJ\}.$$

(1) Montrer que pour tous $A, B \in E$, $A.B$ appartient à E.

(2) Soit $A = aI + bJ$, déduire du point précédent que

$$\forall n \geq 1,\ \exists a_n,\, b_n \in \mathbb{R}\ :\ A^n = a_n I + b_n J$$

et vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(3) Sachant que (i.e., inutile de le vérifier)

$$S^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

en déduire l'expression générale de $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n$, pour tout $n \geq 1$.

3) Soit un espace affin $\mathcal{A}$ de dimension 3 muni d'un repère. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(1, 0, 2)$, $(2, -1, 1)$ et $(1, 1, -1)$ et le vecteur u de composantes $(1, 2, 0)$.

(1) Donner une équation cartésienne du plan contenant A, B et C.

(2) Donner des équations cartésiennes de la droite AB.

(3) Donner des équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D} = C + \rangle u \langle$.

(4) Vérifier que les droites AB et $\mathcal{D}$ sont gauches.

(5) Donner, si possible, des équations cartésiennes d'une droite s'appuyant sur AB et $\mathcal{D}$ et parallèle au vecteur de composantes $(-1, -2, 3)$. Justifier l'existence de la droite éventuellement construite.

4) Dans le plan affin, on considère un ensemble $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de quatre points formant un parallélogramme. On définit quatre autres points B_1, B_2, B_3, B_4 où, pour $i = 1, \ldots, 4$, B_i est le centre de gravité du triangle formé des trois points de $\mathcal{C}$ sauf A_i. Montrer que les centres de gravité des quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ et de $B_1B_2B_3B_4$ coïncident.