Interrogation dispensatoire d'algèbre

Premier bachelier en sciences mathématiques,
lundi 7 janvier 2008

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des <u>feuilles</u> <u>distinctes</u> et <u>numérotées</u> comportant chacune vos <u>nom</u> et <u>prénom</u>. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Partie "théorie" de 8h30 à **10h15**.
- Partie "exercices" de 10h30 à 12h30.
- La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation de l'ensemble de l'examen.

Bon travail !

1.a) Si $A \in \mathbb{C}_n^n$ est une matrice inversible, donnez une formule permettant de calculer son inverse A^{-1}.

Réponse :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{\mathrm{cof}(A)}$$

où $\mathrm{cof}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

1.b) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F_1, F_2, F_3, trois sous-espaces vectoriels distincts de E. Définir ce que l'on entend par F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe.

Réponse : F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe si, la seule façon d'obtenir le vecteur nul comme somme d'éléments $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, $x_3 \in F_3$ de ces trois espaces, est que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Autrement dit, pour tous $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, $x_3 \in F_3$, si $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

1.c) Donnez un exemple montrant que le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F dans un espace vectoriel E n'est en général pas unique.

Réponse : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2), on a $\mathbb{R}^2 = \rangle e_1 \langle \oplus \rangle e_2 \langle$ mais aussi, $\mathbb{R}^2 = \rangle e_1 \langle \oplus \rangle e_1 + e_2 \langle$. On a ainsi exhibé deux supplémentaires de $\rangle e_1 \langle$ dans $\mathbb{R}^2$ distincts.

1.d) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ayant $U = (u_1, \ldots, u_n)$ pour base. Démontrez, en utilisant des résultats vus au cours, la proposition suivante. Des éléments $x_1, \ldots, x_k \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\Phi_U(x_1), \ldots, \Phi_U(x_k) \in \mathbb{K}^n$ sont linéairement indépendants.

Réponse : Il suffit d'utiliser le fait que Φ_U est un *isomorphisme* entre E et $\mathbb{K}^n$. Ainsi, toute relation linéaire ayant lieu entre $x_1, \ldots, x_k$ a également lieu entre $\Phi_U(x_1), \ldots, \Phi_U(x_k)$. En effet, si $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda_1 \Phi_U(x_1) + \cdots + \lambda_k \Phi_U(x_k) = \Phi_U(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) = \Phi_U(0) = 0.$$

Par conséquent, si $x_1, \ldots, x_k \in E$ sont linéairement dépendants, alors $\Phi_U(x_1), \ldots, \Phi_U(x_k) \in \mathbb{K}^n$ aussi. Pour la réciproque, on procède de même en considérant Φ_U^{-1}.

1.e) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels étant un champ, on peut considérer $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel E sur $\mathbb{Q}$. Dans ce contexte, les réels 1 et $\sqrt{2} \in E$ sont-ils linéairement indépendants ? Pourquoi ?
Réponse : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$. Si $\beta = 0$, alors $\alpha = 0$. Si $\beta \neq 0$, alors

$$\sqrt{2} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ceci est impossible car le second membre est rationnel (quotient de deux éléments de $\mathbb{Q}$), alors que le premier membre, $\sqrt{2}$, est irrationnel. En conclusion, si $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$, alors $\alpha = \beta = 0$ et 1 et $\sqrt{2}$ sont donc linéairement indépendants dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-vectoriel.

1.f) Soient $p, q > 1$ deux entiers. On définit une fonction

$$f : \{0, \ldots, p+q-1\} \to \{0, \ldots, p+q-1\}$$

par

$$f(i) = \begin{cases} i+q, & \text{si } i \in \{0, \ldots, p-1\} \\ i-p, & \text{si } i \in \{p, \ldots, p+q-1\}. \end{cases}$$

Cette fonction est-elle une permutation de $\{0, \ldots, p+q-1\}$? Si $p = q = 4$, s'agit-il d'une permutation paire ? Justifier vos réponses.
Réponse : Il suffit de remarquer que f est une bijection de $\{0, \ldots, p+q-1\}$ dans lui-même. On peut l'expliquer de plusieurs façons (plus ou moins rapides). La façon la plus "standard" (et pas la plus courte) est de vérifier l'injectivité et la surjectivité de f. Soient i, j tels que $f(i) = f(j)$. Si $i, j \in \{0, \ldots, p-1\}$, alors $f(i) = i + q$ et $f(j) = j + q$. On conclut que $i = j$. On procède de même si $i, j \in \{p, \ldots, p+q-1\}$. Enfin, il reste le cas où $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $j \in \{p, \ldots, p+q-1\}$. Ici, $f(i) = i+q$ et $f(j) = j-p$. De là, on tire $i+q = j-p$ et $p+q = j-i$. Puisque $j < p+q$ et $i \geq 0$, ce cas n'arrive jamais. Passons à la surjectivité. Soit $y \in \{0, \ldots, p+q-1\}$. Si $y \in \{q, \ldots, p+q-1\}$, alors $x = y - q$ est tel que $f(x) = y$. Si $y \in \{0, \ldots, q-1\}$, alors $x = y + p$ est tel que $f(x) = y$.

Une autre façon (plus courte) de procéder est de remarquer que f met en bijection les ensembles $\{0, \ldots, p-1\}$ et $\{q, \ldots, p+q-1\}$, ainsi que les ensembles $\{p, \ldots, p+q-1\}$ et $\{0, \ldots, q-1\}$.

Enfin, pour $p = q = 4$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (0\ 4)\ (1\ 5)\ (2\ 6)\ (3\ 7)$$

produit de 4 transpositions (impaires), la signature d'un produit étant égale au produit des signatures, on trouve comme signature $(-1)^4$. Il s'agit d'une permutation paire.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un champ $\mathbb{K}$. Enoncer et démontrer la propriété relative au nombre d'éléments d'une base quelconque de E (et qui débouche sur la notion de dimension de E).

3) Quand dit-on qu'un système d'équations linéaires est *de Cramer* ? Pour un tel système, établir les formules, dites *de Cramer*, qui en permettent la résolution.

Consignes :

- Répondre à des questions différentes sur des feuilles distinctes et numérotées comportant chacune vos nom et prénom. Rendre au moins une feuille par question (même en cas d'abstention).
- Justifier vos réponses. Fin de l'interrogation: **12h30**.

1) Etudier la compatibilité et résoudre le système suivant (où m est un paramètre réel).

$$\begin{cases} m\,x + (m-1)\,y = & m+2 \\ (m+1)\,x - m\,y = & 5m+3 \end{cases}$$

Réponse : Sous forme matricielle, ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} m & m-1 \\ m+1 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A de ce système a pour déterminant $-2m^2+1$ qui s'annule si et seulement si $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Si $m \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 2$, le système est compatible. Il possède même une unique solution puisqu'il s'agit d'un système de Cramer. Il est facile de calculer l'inverse de A. De là, l'unique solution est donnée par

$$A^{-1}\begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-2m^2}\begin{pmatrix} -m & -m+1 \\ -m-1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+2 \\ 5m+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

• Il reste à présent à consider les cas $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\mathrm{rg}(A) = 1$). Calculons tout d'abord le déterminant suivant

$$\det\begin{pmatrix} m & m+2 \\ m+1 & 5m+3 \end{pmatrix} = 2(2m^2-1).$$

Il est nul pour $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Par la règle des sous-matrices bordées, puisque l'élément $A_{11} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$, on en conclut que $\mathrm{rg}(A|b) = 1 = \mathrm{rg}(A)$. Le système est compatible et possède donc une infinité simple de solutions. Il suffit de considérer l'une des deux équations. De la première équation, on tire

$$x = 1 + \frac{2}{m} - \frac{m-1}{m}\,y.$$

Ainsi, pour $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, les solutions sont de la forme

$$(x,y) = (1 + \frac{2}{m} - \frac{m-1}{m}\,\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $n \geq 2$ un entier et $S_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un sous-ensemble de E.
On définit le sous-ensemble $S_2 = \{g_1, \ldots, g_n\}$ par

$$g_j = e_j + e_{j+1}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$$

et

$$g_n = e_n + e_1.$$

Démontrer les trois assertions suivantes :

a) Pour $n = 3$, si S_2 est libre, alors S_1 l'est aussi.
b) Pour n impair, si S_1 est libre, alors S_2 l'est aussi.
c) Pour n pair, S_2 est une partie liée.

Réponse : Pour la première partie, puisque $g_1 = e_1 + e_2$, $g_2 = e_2 + e_3$ et $g_3 = e_1 + e_3$, on trouve

$$e_1 = \frac{g_1 - g_2 + g_3}{2}, \; e_2 = \frac{g_1 + g_2 - g_3}{2}, \; e_3 = \frac{-g_1 + g_2 + g_3}{2}.$$

Ainsi, les vecteurs e_1, e_2, e_3 appartiennent au sous-espace vectoriel $F = \rangle g_1, g_2, g_3\langle$ et si on considère le déterminant de la matrice formée de leurs vecteurs de composantes dans la base (g_1, g_2, g_3) du sous-espace vectoriel F, on trouve

$$\frac{1}{8} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ainsi, e_1, e_2, e_3 sont linéairement indépendants.

Une solution alternative "standard" consiste à considérer une combinaison linéaire nulle $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, et à montrer que dans ce cas, on a nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Cette combinaison se réécrit

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) g_1 + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) g_2 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) g_3 = 0.$$

En exploitant l'hypothèse d'indépendance linéaire des g_i, on en tire un système homogène de 3 équations à 3 inconnues possédant l'unique solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Pour b), le raisonnement est sensiblement identique. On considère la matrice $n \times n$ formée des composantes des g_i dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ du sous-espace vectoriel $G = \rangle e_1, \ldots, e_n\langle$. Son déterminant est donné par

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En développant par la règle des mineurs selon la dernière colonne, on trouve

$$(-1)^{1+n}. \det(U_{n-1}) + (-1)^{2n}. \det(L_{n-1}) = 2$$

avec U_{n-1} (resp. L_{n-1}) est une matrice triangulaire supérieure (avec des 1 sur la diagonale et sur la "bande" au-dessus (resp. en-dessous) de la diagonale) dont le déterminant vaut 1.

Pour répondre à c), on remarque que

$$g_1 - g_2 + g_3 - g_4 + \cdots + g_{n-1} - g_n = 0.$$

Cette relation linéaire montre que S_2 est une partie liée.

3) Soient $\mathbb{R}_n^n$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées de dimension n et $J \in \mathbb{R}_n^n$ tel que $J^2 = I$. On considère l'ensemble

$$E = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : A = aI + bJ\}.$$

(1) E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n^n$?
Réponse : La matrice nulle est bien de la forme $0I + 0J$. Soient $aI+bJ \in E$ et $cI+dJ \in E$. Leur somme $(a+c)I+(b+d)J$ appartient encore à E. Enfin, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(aI+bJ) = (a\lambda)I+(b\lambda J)J$ appartient encore à E. Cela suffit pour vérifier que E est bien un sous-espace vectoriel.

(2) Montrer que pour tous $A, B \in E$, $A.B$ appartient à E.
Réponse : Soient $aI + bJ \in E$ et $cI + dJ \in E$. On a

$$(aI + bJ)(cI + dJ) = (ac + bd)I + (ad + bc)J \in E.$$

(3) Soit $A = aI + bJ$, déduire du point précédent que

$$\forall n \geq 1,\ \exists a_n,\ b_n \in \mathbb{R}\ :\ A^n = a_nI + b_nJ$$

et vérifier que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Réponse : Par récurrence sur n. On note tout d'abord que A appartient à E. Ensuite, si $A^{n-1} \in E$, alors par le point précédent, $A^n = A^{n-1}.A$ appartient encore à E (car produit de deux éléments de E). Pour la seconde partie, c'est immédiat pour $n = 1$, $a_1 = a$ et $b_1 = b$. Ensuite, on remarque d'une part que

$$\begin{aligned} a_nI + b_nJ = A^n = A^{n-1}.A &= (a_{n-1}I + b_{n-1}J)(aI + bJ) \\ &= (a_{n-1}a + b_{n-1}b)I + (a_{n-1}b + b_{n-1}a)J. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = a_{n-1}a + b_{n-1}b \\ b_n = a_{n-1}b + b_{n-1}a \end{array} \right.$$

D'autre part, il nous reste à vérifier la formule proposée. Pour $n = 1$, on a bien

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^0}_{=I} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Ensuite, il suffit de vérifier que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1}a + b_{n-1}b \\ a_{n-1}b + b_{n-1}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

4) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E = F \oplus G$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de F. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rangle e_1 + g, \ldots, e_k + g\langle$ est un supplémentaire de G dans E.

Réponse : Puisque $E = F \oplus G$, tout élément $x \in E$ se décompose sous la forme

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + h$$

pour des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et un élement $h \in G$ (uniques). Cela s'écrit encore

$$x = \lambda_1(e_1 + g) + \cdots + \lambda_k(e_k + g) + \underbrace{h - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)g}_{\in G}$$

et donc, $E = \rangle e_1 + g, \ldots, e_k + g\langle + G$ (on vient de montrer l'inclusion "$\subseteq$", l'autre est triviale).

Soit $y \in \rangle e_1 + g, \ldots, e_k + g\langle \cap G$. Il reste à montrer que $y = 0$. Il existe des coefficients $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tels que

$$y = \mu_1(e_1 + g) + \cdots + \mu_k(e_k + g).$$

De là, on tire

$$\underbrace{\mu_1 e_1 + \cdots + \mu_k e_k}_{\in F} = \underbrace{y - (\mu_1 + \cdots + \mu_k)g}_{\in G} = 0$$

car $y \in G$ et $F \cap G = \{0\}$. Puisque les e_i sont linéairement indépendants, on conclut que les μ_i sont tous nuls et donc $y = 0$.