

Examen de théorie des graphes 25 août 2023
bacheliers en sc. mathématiques et informatiques

Consignes : Répondre à la théorie et aux exercices sur des feuilles distinctes. La clarté, la rédaction et la justification des réponses fournies interviennent dans la cotation. Énoncer les résultats utilisés. Lorsqu'une question contient plusieurs points, pour répondre à une partie, on admettra les points précédents. Fin de l'examen **12h00**. Bon travail.

● Pour les étudiants **ne présentant pas le projet**

1. Énoncer l'algorithme de Fleury (permettant la recherche d'un circuit eulérien) et l'appliquer à un graphe de votre choix (cette application devra mettre en évidence la notion d'arête de coupure).
2. Au choix :
 - Démontrer q'un graphe simple et planaire contient un sommet de degré au plus 5.
Démontrer que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.
 - Détailler les grandes étapes de l'algorithme du PageRank. Énoncer (sans preuve) les principaux résultats théoriques utilisés et rappeler les définitions importantes.
3. Donner un exemple de multi-graphe orienté à 4 sommets pour lequel le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets choisis se comporte en $\sim n 2^n$ (et ce comportement asymptotique est dominant par rapport à tout autre choix de sommets).

● Pour les étudiants **ayant présenté le projet**

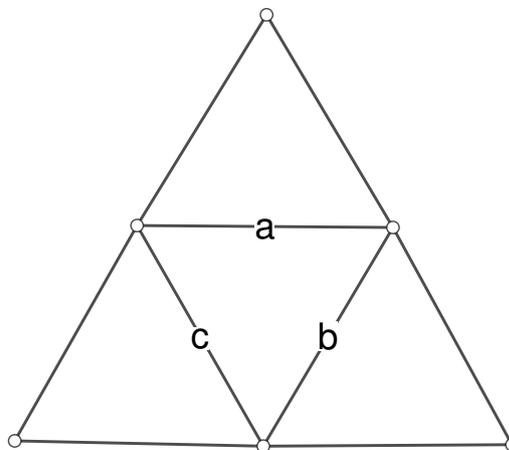
1. a) Définir un graphe (non orienté) simple hamiltonien.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un multi-graphe orienté possède un chemin eulérien.

- c) Définir la notion de matrice primitive. Quelle propriété possède un multi-graphe orienté dont la matrice est primitive ?
 - d) Définir la notion de tri topologique d'un graphe simple et orienté.
 - e) Énoncer la relation d'Euler (en particulier, donner les hypothèses et rappeler les notations utilisées).
2. Pour justifier vos réponses aux trois VRAI-FAUX ci-après, un argument théorique du cours ou un (contre-)exemple explicite peuvent suffire
- Il existe un arbre possédant 2023 sommets et 2023 arêtes.
 - Il existe un multi-graphe non orienté contenant un chemin eulérien mais qui n'est pas eulérien.
 - Un multi-graphe orienté est fortement connexe si et seulement si il existe un circuit passant par tous les sommets.

● Pour **TOUS** (exercices 20 points)

1. (5 points)

a) Mettre en évidence (en surlignant) un sous-arbre couvrant le graphe ci-dessous :



Pour les points suivants, expliquer à chaque fois votre calcul.

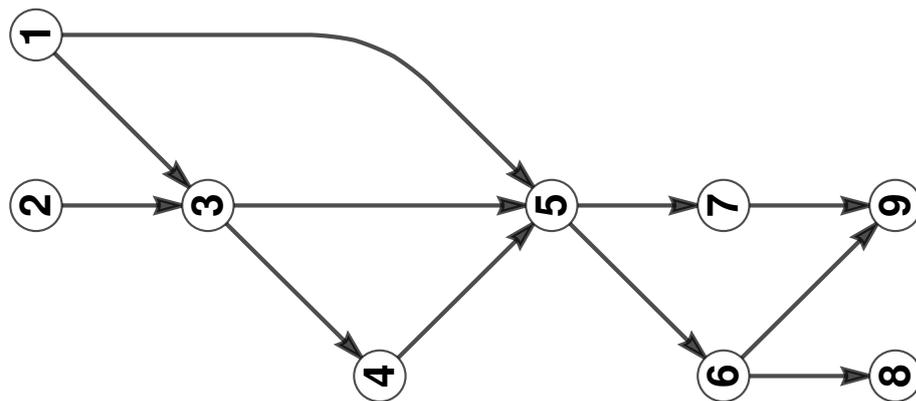
b) Combien y a-t-il de sous-arbres couvrants ne comprenant aucune des trois arêtes *a*, *b*, *c* ?

- c) Combien y a-t-il de sous-arbres couvrants comprenant l'arête a mais aucune des deux arêtes b, c ?
- d) Combien y a-t-il de sous-arbres couvrants comprenant les arêtes b et c mais pas l'arête a ?
- e) En déduire le nombre total de sous-arbres couvrants du graphe.
2. (5 points) Soit un graphe planaire connexe possédant uniquement des faces triangulaires et carrées. Chaque sommet appartient exactement à une face carrée et 4 faces triangulaires.

Donner une relation liant le nombre de sommets et le nombre d'arêtes (justifier).

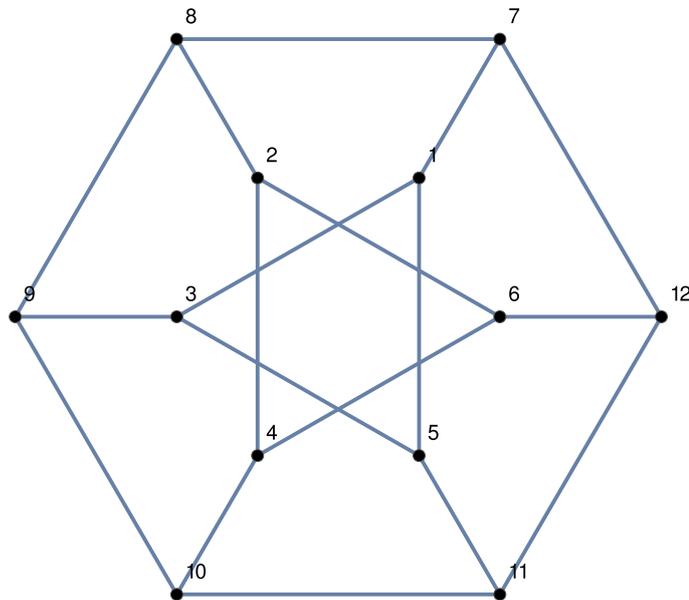
Déterminer le nombre d'arêtes, de faces carrées, de faces triangulaires et de sommets du graphe.

3. (2 points) Fournir tous les tris topologiques du graphe ci-dessous



4. (3 points) Démontrer qu'un arbre ayant au moins 3 sommets possède au moins deux *feuilles*, i.e., deux sommets de degré 1.

5. (5 points) On considère le *graphe de Dürer* représenté ci-dessous



- Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
- Prouver que cette matrice M est primitive (*Suggestion* : il n'est pas nécessaire d'en calculer explicitement des puissances).
- Sans faire le calcul, pourquoi les éléments diagonaux de M^2 sont-ils tous égaux à 3 ?
- Même question avec M^3 , pourquoi ses éléments diagonaux sont-ils égaux soit à 2, soit à 0 ?
- Sachant que le diamètre du graphe vaut 4 (i.e., la distance entre deux sommets quelconques est au plus 4 et il existe deux sommets dont la distance est exactement 4), quel renseignement pouvez-vous tirer sur les puissances de M ?